42. (c) এখানে, $\log(1 - px + qx^2)$

$$= \left\{\alpha x - \frac{(\alpha x)^2}{2} + \frac{(\alpha x)^3}{3} - \cdots\right\} + \left\{\beta x - \frac{(\beta x)^2}{2} + \frac{(\beta x)^3}{3} - \cdots\right\}$$

$$= \log(1 + \alpha x) + \log(1 + \beta x) = \log\{1 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta x^2\}$$

$\Rightarrow \alpha + \beta = -p$ এবং $\alpha\beta = q$. সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণটি হল $x^2 + px + q = 0$.

43. (b) এখানে $\dfrac{1}{(1 - ax)(1 - bx)}$

$$= \{1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots\}\{1 + bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \cdots\}$$

$$= 1 + (a + b)x + (a^2 + b^2 + ab)x^2 + (a^3 + b^3 + a^2b + ab^2)x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{b^2 - a^2}{b - a}x + \frac{b^3 - a^3}{b - a}x^2 + \frac{b^4 - a^4}{b - a}x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a}.$$

44. (a) এখানে $\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-2nx}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nx}} = \dfrac{\frac{1}{1-e^{-2x}}}{\frac{1}{1+e^{-2x}}} = \dfrac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}$

$$= \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} \quad \left[\text{since } e^x = \frac{1}{\sqrt{\tan 15^\circ}} \text{ so } e^{-2x} = \tan 15^\circ\right]$$

$$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

MCQ

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
(*Matrix and Determinant*)

সংজ্ঞা ঃ $m.\ n$ সংখ্যক বাস্তব সংখ্যাকে যদি প্রথম বন্ধনী ( ) অথবা তৃতীয় বন্ধনী [ ]-এর মধ্যে m-সংখ্যক সারি ও n-সংখ্যক স্তম্ভে সাজানো হয়, তবে সজ্জাটিকে একটি **$m \times n$ আকারের বা ক্রমের** (order বা, size) **বাস্তব ম্যাট্রিক্স্** বলে, যাকে আমরা সংক্ষেপে $m \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স্ বলব।

ম্যাট্রিক্স্-এর বিভিন্ন ধরন ঃ

➢ সারি-ম্যাট্রিক্স্ ও স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স ঃ

একটি $1 \times n$ আকারের ম্যাট্রিক্স্কে n-ক্রমের **সারি-ম্যাট্রিক্স্** (row matrix) এবং $m \times 1$ আকারের ম্যাট্রিক্স্কে m-ক্রমের **স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স্** (column matrix) বলে।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ হল যথাক্রমে 3 ও 2 ক্রমের দুটি স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স্ এবং (3 2 5), (1, 0) হল যথাক্রমে 3 ও 2 ক্রমের দুটি সারি-ম্যাট্রিক্স্।

মনে রাখবে একটি 1×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স্কে একটি সারি-ম্যাট্রিক্স্ অথবা একটি স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স্ দুটিই ভাবা যেতে পারে।

➢ আয়তাকার-ম্যাট্রিক্স্ (*Rectangular matrix*) :

$m \times n$ ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স্ A-কে একটি **আয়তাকার-ম্যাট্রিক্স্** বলা হয়, যখন $m \neq n$.

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ যথাক্রমে 3×2 ও 2×3 ক্রমের দুটি আয়তাকার- ম্যাট্রিক্স্।

➢ বর্গ-ম্যাট্রিক্স্ (*Square matrix*) ঃ

একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ কে বর্গ-ম্যাট্রিক্স্ বলে যখন $m = n$ হয়; অর্থাৎ কোনো ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও স্তম্ভের সংখ্যা সমান হলে তাকে বর্গ-ম্যাট্রিক্স বলে। $n \times n$ ক্রমের একটি বর্গ-ম্যাট্রিক্সকে **n ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ দুটি যথাক্রমে 2 ও 3 ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্স।

➢ শূন্য-ম্যাট্রিক্স (*Null matrix* বা *Zero matrix*) ঃ

কোনো ম্যাট্রিক্স-এর প্রতিটি পদই যদি শূন্য (zero) হয় তবে তাকে শূন্য-ম্যাট্রিক্স বলে, অর্থাৎ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ একটি শূন্য-ম্যাট্রিক্স হবে যদি প্রতিটি i ও j-এর জন্যে $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$ $a_{ij} = 0$ হয়। $m \times n$ ক্রমের যে কোনো শূন্য-ম্যাট্রিক্সকে $0_{m \times n}$ আকারে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$$0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

➢ বর্গ-ম্যাট্রিক্স-এর কর্ণ (*Diagonal of a square matrix*) ঃ

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ বর্গ-ম্যাট্রিক্সের (i, i) স্থানের পদ a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ কে **কর্ণ পদ** (diagonal element) বা **প্রধান কর্ণের পদ** বলে এবং $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$-কে একত্রে (ক্রম অনুযায়ী লিখলে) A ম্যাট্রিক্স-এর **(প্রধান) কর্ণ** বলে।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্স-এর প্রধান কর্ণের পদগুলি হল 1, 0, 5.

➢ কর্ণ-ম্যাট্রিক্স (*Diagonal matrix*) ঃ

একটি m ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্স $A = (a_{ij})_{m \times m}$-কে কর্ণ-ম্যাট্রিক্স বলে যদি তার প্রধান কর্ণের পদগুলি ছাড়া সমস্ত পদের মান শূন্য হয় অর্থাৎ $a_{ij} = 0$ হয়, যখন $i, j = 1, 2, \ldots, n.\ i \ne j$, (প্রধান কর্ণের যেকোনো পদ শূন্য হতেও পারে, নাও পারে)।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ যথাক্রমে 2 ও 3 ক্রমের কর্ণ-ম্যাট্রিক্স।

➢ স্কেলার ম্যাট্রিক্স ঃ

যদি কোনো কর্ণ-ম্যাট্রিক্স-এ প্রধান কর্ণের সমস্ত পদগুলির মান সমান হয় তবে তাকে **স্কেলার-ম্যাট্রিক্স** (*scalar matrix*) বলে অর্থাৎ 3 ক্রমের স্কেলার-ম্যাট্রিক্স সব সময় $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ আকারের হয়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ একটি 2 ক্রমের স্কেলার-ম্যাট্রিক্স্, আবার $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ একটি 3 ক্রমের স্কেলার-ম্যাট্রিক্স্।

> ***একক-ম্যাট্রিক্স্ (unit matrix) ঃ***

A একটি n ক্রমের কর্ণ-ম্যাট্রিক্স্কে **একক-ম্যাট্রিক্স্** বলা হয় যখন তার প্রধান কর্ণের প্রতিটি পদের মান 1 হয় এবং সেক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্স্টিকে I_n দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ একক-ম্যাট্রিক্স্ একটি বিশেষ ধরনের কর্ণ-ম্যাট্রিক্স্।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ হল যথাক্রমে 3 ও 2 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স্।

> **প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স্ (*Symmetric matrix and Skew-symmetric matrix*)ঃ**

একটি $m \times n$ আকারের বর্গ-ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ কে

(i) **প্রতিসম-ম্যাট্রিক্স্** বলে, যখন i, j-এর 1 থেকে n পর্যন্ত সমস্ত মানের জন্যে $a_{ij} = a_{ji}$ হয়,

(ii) **বিপ্রতিসম-ম্যাট্রিক্স্** বলে, যখন i, j-এর 1 থেকে n পর্যন্ত সমস্ত মানের জন্যে $a_{ij} = -a_{ji}$ হয়।

বুঝতেই পারছ যে, একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে $a_{ii} = -a_{ii}$ হওয়ায় $2a_{ii} = 0$ হবে অর্থাৎ $a_{ii} = 0$, যেখানে, $i = 1, 2, ..., n$.

∴ একটি বিপ্রতিসম-ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের প্রতিটি পদের মান শূন্য হতেই হবে।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ একটি 3 ক্রমের প্রতিসম-ম্যাট্রিক্স্;

আবার $B = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$ একটি 3 ক্রমের বিপ্রতিসম-ম্যাট্রিক্স্।

> **পরিবর্ত-ম্যাট্রিক্স্ (*Transpose of a matrix*) ঃ**

একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ A-এর সারি ও স্তম্ভ পরস্পর স্থান বিনিময় করে অর্থাৎ সারিগুলিকে স্তম্ভে এবং স্তম্ভগুলিকে সারিতে বদলে দিয়ে যে $n \times m$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স্টি পাওয়া যায় তাকে A-এর **পরিবর্ত-ম্যাট্রিক্স্** বলে এবং তাকে A^T বা A^t আকারে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

একটি 2×3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ হলে $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ হবে, যা একটি 3×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স্।

❒ **টীকা** ঃ পরিবর্ত-ম্যাট্রিক্স্-এর ধারণা অনুযায়ী আমরা বলতে পারি যে, একটি বর্গ-ম্যাট্রিক্স্ A প্রতিসম হবে, যদি $A^T = A$ এবং বিপ্রতিসম হবে যদি $A^T = -A$ হয়।

➢ ***উপ-ম্যাট্রিক্স্ (Submatrix)*** ঃ

কোনো একটি ম্যাট্রিক্স্ A-এর এক বা একাধিক সারি বা স্তম্ভ অথবা দুটিই বাদ দিয়ে যে সমস্ত নতুন ম্যাট্রিক্স্ গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে A-এর এক একটি **উপ-ম্যাট্রিক্স্** বলে।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্স্টি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & -3 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$-এর তৃতীয় স্তম্ভটিকে বাদ দিয়ে গঠন করা উপ-ম্যাট্রিক্স্।

একইভাবে দেখানো যায়, $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ এবং $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$, A-এর আরও দুটি উপ-ম্যাট্রিক্স্।

ম্যাট্রিক্স্ বীজগণিত (*Matrix Algebra*) ঃ

➢ ***দুটি ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of two matrices)*** ঃ

দুটি ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ এবং $B = (b_{rs})_{k \times p}$ কে সমান বলা হবে যদি ও একমাত্র যদি (i) A ও B সমক্রমের হয় অর্থাৎ $m = k$, $n = p$ হয়, এবং (ii) দুটিরই অনুরূপ পদগুলি সমান, অর্থাৎ i ও j-এর সম্ভাব্য প্রতিটি মানে $a_{ij} = b_{ij}$ হয়।

সুতরাং **দুটি অসম ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ A ও B-এর সমতার প্রশ্নই ওঠে না।**

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ হবে যদি ও কেবলমাত্র যদি $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = -1$, $a_2 = 3$, $b_2 = 0$ এবং $c_2 = 3$ হয়।

ম্যাট্রিক্সের যোগ (*Addition of two matrices*) ঃ

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ ও $B = (b_{rs})_{k \times p}$, ম্যাট্রিক্স্ দুটিকে যোগ করা সম্ভব হবে যদি ও একমাত্র যদি A

ও B সমক্রমের হয় অর্থাৎ $m = k$, $n = p$ হয়; এবং সেক্ষেত্রে যোগফল A + B একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স $C = (c_{ij})_{m \times n}$ হবে, যেখানে $i = 1, 2, 3, \ldots m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$-এর প্রতিটি মানেই $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, হবে।

অর্থাৎ, A ও B-এর অনুরূপ পদগুলিকে যোগ করে C ম্যাট্রিক্সটিকে পাওয়া যাবে।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ হলে, যোগফল হবে } A + B = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

উল্লম্ব ম্যাট্রিক্স্ (*Orthogonal matrix*) ঃ

n-ক্রমের একটি বর্গম্যাট্রিক্স A-কে উল্লম্ব (*orthogonal*) বলা হয় যদি $AA^T = A^TA = I_n$ হয়।

ম্যাট্রিক্স্ যোগের ধর্ম ঃ

1. সমক্রমের যেকোনো দুটি ম্যাট্রিক্স্ A ও B-এর ক্ষেত্রে A + B = B + A হবে। [অর্থাৎ **ম্যাট্রিক্স যোগ বিনিময়যোগ্য** (commutative)]

2. একই ক্রমের যেকোনো তিনটি ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, $C = (c_{ij})_{m \times n}$-এর জন্যে A + (B + C) = (A + B) + C হবে।

[অর্থাৎ ম্যাট্রিক্স্ যোগ **সংযোজ্য সূত্র** (associative law) মেনে চলে]

3. যেকোনো একটি ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$-এর জন্যে, $A + O_{m \times n} = O_{m \times n} + A = A$.

একটি ম্যাট্রিক্স-এর ঋণাত্মক ম্যাট্রিক্স (*Negative of a matrix*) ঃ

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ ম্যাট্রিক্স-এর ঋণাত্মক ম্যাট্রিক্সটিকে – A দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, যা একই ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স্ এবং যাকে নীচের নিয়মে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ

$-A = (b_{ij})_{m \times n}$ যেখানে i ও j-এর সম্ভাব্য সব মানে $b_{ij} = -a_{ij}$ হয়।

$\therefore A = (a_{ij})_{m \times n}$ হলে $A + (-A) = (-A) + A = O_{m \times n}$ হবে।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$$\text{যদি } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ হয়, তবে } -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ হবে।}$$

দুটি ম্যাট্রিক্স-এর বিয়োগ (*Subtraction of two matrices*) ঃ

দুটি ম্যাট্রিক্স-এর বিয়োগ করা কেবলমাত্র তখনই সম্ভব যখন ম্যাট্রিক্স্ দুটির ক্রম অভিন্ন হয় অর্থাৎ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ এবং $B = (b_{rs})_{k \times p}$-এর বিয়োগ করা সম্ভব হবে যদি $m = k$ এবং $n = p$ হয়। যদি A ও B-এর ক্রম সমান হয় তবে A ও B-এর অন্তরফলকে A – B আকারে চিহ্নিত করা হয় এবং A – B কে নীচের নিয়মে সংজ্ঞায়িত করা হয়,

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij})_{m \times n} + (-b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

অর্থাৎ A-এর যেকোনো পদ থেকে B-এর অনুরূপ পদটি বিয়োগ করে A – B-এর ঐ অবস্থানের পদটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ হয়, তবে

$A - B = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 1 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ এবং $B - A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ হবে।

একটি ম্যাট্রিক্স্ ও একটি স্কেলারের গুণ (*Scalar multiplication*)ঃ

মনে করা যাক $A = (a_{ij})_{m \times n}$ একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ ও k একটি স্কেলার (অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যা)। সেক্ষেত্রে A এবং k-এর গুণফলকে k**A** আকারে প্রকাশ করা হয়, যা একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ এবং যাকে নীচের নিয়মে সংজ্ঞায়িত করা হয় ঃ

$$kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}$$

খেয়াল করে দেখ যে, A-এর প্রতিটি পদকে k দিয়ে গুণ করে kA ম্যাট্রিক্স্-এর অনুরূপ পদটিকে পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ হয়, তবে $5A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 10 & -15 & 5 \end{pmatrix}$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যেকোনো একটি ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$-এর ক্ষেত্রে $(-1)A = -A$; এবং $0.A = O_{m \times n}$ হয়।

ম্যাট্রিক্স ও স্কেলার-এর গুণের ধর্ম ঃ

1. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ যেকোনো একটি ম্যাট্রিক্স্ ও k_1, k_2 দুটি ধ্রুবক (স্কেলার) হলে,

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A.$$

2. যেকোনো দুটি ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ এবং যেকোনো একটি স্কেলার k-এর জন্য $k(A + B) = kA + kB$ হবে।

দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণ (*Multiplication* বা *Product of two matrices*) ঃ

দুটি ম্যাট্রিক্স্ $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ও $B = (b_{sk})_{r \times p}$-এর গুণফল AB নির্ণয় করা সম্ভব হবে যদি $n = r$ হয় অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ-সংখ্যা, B ম্যাট্রিক্সের সারি-সংখ্যার সমান হয় এবং সেক্ষেত্রে A-এর

সঙ্গে B-এর গুণফল, A.B, একটি $m \times p$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স্ $C = (c_{ik})_{m \times p}$ হবে, যেখানে $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$ হয়।

অর্থাৎ A.B-এর (i, k)-তম পদটি হল A-এর i-তম সারি (সারি-ম্যাট্রিক্স্ হিসেবে গণ্য করে) ও B-এর k-তম স্তম্ভের (স্তম্ভ-ম্যাট্রিক্স্ হিসেবে গণ্য করে) গুণফল।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1+2.2+5.1 & 2.2+2.1+5.1 \\ 1.1+0.2+3.1 & 1.2+0.1+3.1 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

নির্ণায়কের সংজ্ঞা ঃ

ধরি $A = (a_{ij})$ একটি n-ক্রমের বর্গ-ম্যাট্রিক্স $(1 \le n \le 3)$। এক্ষেত্রে A-এর নির্ণায়ক (যা det A বা | A | চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়) বলতে আমরা বুঝবো,

(1) যখন $n = 1$ $\quad \det A = | a_{11} | = a_{11}$.

(2) যখন $n = 2$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$.

(3) যখন $n = 3$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}\, a_{23} - a_{32}\, a_{23})$

$$- a_{12}(a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23})$$
$$+ a_{13}(a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}).$$

সংজ্ঞা ঃ (কোনো পদের লঘু নির্ণায়ক বা মাইনর) (Minor of an element) ঃ

যেকোনো একটি 3 ক্রমের নির্ণায়ক $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$-এর (i, j)-তম পদ a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$-এর **লঘু নির্ণায়ক বা মাইনর**-কে M_{ij} দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং M_{ij} হল সেই 2 ক্রমের নির্ণায়ক যা, Δ-এর i-তম সারি ও j-তম স্তম্ভকে বাদ দিলে অবশিষ্ট থাকে।

নীচের উদাহরণটি তোমাদের এই সংজ্ঞাটিকে বুঝতে সাহায্য করবে।

ধর, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; তাহলে, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ $(= a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$. লক্ষ্য

কর, M_{12} পাওয়া গেল Δ-এর প্রথম সারি ও দ্বিতীয় স্তম্ভ বাদ দিয়ে। আবার একইভাবে, ঐ নির্ণায়ক

Δ-এর ক্ষেত্রেই, $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \; (= a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})$,

এবং $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \; (= a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$ হবে।

সংজ্ঞা ঃ (কোনো পদের সহ-উৎপাদক) (Co-factor of an element) ঃ

যেকোনো 3 ক্রমের নির্ণায়ক $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$-এর (i, j) তম পদ a_{ij}-এর **সহ-উৎপাদককে** A_{ij} চিহ্ন দিয়ে লেখা হয় এবং A_{ij} কে $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ নিয়মে সংজ্ঞায়িত করা হয়, যেখানে M_{ij} হল Δ-এর (i, j)-তম পদের লঘু নির্ণায়ক বা মাইনর।

উদাহরণ ঃ [redacted]

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ হলে,

$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2;$

এক্ষেত্রে $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 6, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -2$ হবে।

নির্ণায়কের ধর্ম (Properties of determinants) ঃ

➲ **I. কোনো নির্ণায়কের কোনো একটি সারি বা স্তম্ভের সব কটি পদের মান শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।**

➲ **II. কোনো নির্ণায়কের সারি ও স্তম্ভগুলি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে, নির্ণায়কটির মান অপরিবর্তিত থাকে।**

➲ **III. কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি (বা স্তম্ভ) অভিন্ন হলে, নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।**

➲ **IV. কোনো নির্ণায়কের কোনো একটি সারির (বা স্তম্ভের) প্রতিটি পদকে একটি ধ্রুবক k দিয়ে গুণ করলে নতুন নির্ণায়কটির মান আগের নির্ণায়কটির মানের k গুণ হবে।**

➲ **V. কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি (বা স্তম্ভ) যদি তাদের স্থান পরিবর্তন করে তবে নতুন নির্ণায়কের সাংখ্যমান অপরিবর্তিত থাকবে, কিন্তু চিহ্ন বদলে যাবে।**

➲ **VI. কোনো নির্ণায়কের কোনো সারির (বা স্তম্ভের) প্রতিটি পদ যদি দুটি রাশির সমষ্টি**

হয় তবে ঐ নির্ণায়কটিকে একই ক্রমের দুটি নির্ণায়কের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা যাবে।

➲ **VII.** কোনো নির্ণায়কের কোনো একটি সারি (বা স্তম্ভের) প্রতিটি পদের সঙ্গে অপর একটি সারির অনুরূপ পদগুলির নির্দিষ্ট গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করলে ঐ নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকে।

➲ **VIII.** কোনো নির্ণায়কের এক বা একাধিক পদ x-এর বহুপদরাশি (**polynomial in** x) হলে এবং $x = a$ বসালে যদি নির্ণায়কটির মান শূন্য হয়, তবে $(x - a)$ ঐ নির্ণায়কের একটি উৎপাদক হবে।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle) ঃ

একটি ত্রিভুজ ABC-এর শীর্ষবিন্দুগুলি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ হলে, ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক।

ম্যাট্রিক্স-এর অ্যাডজয়েন্ট (Adjoint of a matrix) ঃ

ধরি $A = (a_{ij})$ একটি n-ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। এক্ষেত্রে det A-এর পদগুলি সহ-উৎপাদক (co-factor)-এর দ্বারা গঠিত বর্গ ম্যাট্রিক্স B-কে (যার ক্রমও n হবে) সহ-উৎপাদক ম্যাট্রিক্স বলে এবং B^T ম্যাট্রিক্সটিকে A-এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

ম্যাট্রিক্স-এর অ্যাডজয়েন্ট-এর ধর্ম ঃ

➲ **1.** A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে

$$A\,(\text{adj } A) = |A|.\,I_n = (\text{adj } A)A$$

➲ **2.** A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে

$$\text{adj } (A^T) = (\text{adj } A)^T.$$

➲ **3.** A, B দুটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে

$$\text{adj } (AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$$

➲ **4.** A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে

$$\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1} \text{ এবং } \det(\text{adj } (\text{adj } A)) = (\det A)^{(n-1)^2}.$$

বর্গ-ম্যাট্রিক্সের বিপরীত-ম্যাট্রিক্স (Inverse of a square matrix) ঃ

সংজ্ঞা ঃ যেকোনো n ক্রমের **বর্গ-ম্যাট্রিক্স** A-এর জন্যে যদি n ক্রমের এমন একটি ম্যাট্রিক্স B পাওয়া যায় যে $A.B = B.A = I_n$ হয়, যেখানে I_n হল n ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স, তবে B কে A-এর **বিপরীত-ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

যেকোনো 2×2 ম্যাট্রিক্স্ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ হলে, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ হবে এবং A যদি n ক্রমের এমন বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় যে $\det A \neq 0$ তাহলে $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}A}{\det A}$ হবে।

বিপরীত-ম্যাট্রিক্সের ধর্ম ঃ

1. A বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে A^{-1} থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\det A \neq 0$ হয়।

2. $(A^{-1})^{-1} = A$, যেকোনো বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স A-এর জন্যে।

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, যেকোনে বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স A-এর জন্যে।

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$, একই ক্রমের যেকোনো দুটি বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স-এর জন্যে।

5. A, B, C উপযুক্ত ক্রমের ম্যাট্রিক্স, $\det A \neq 0$ এবং $AB = AC \Rightarrow B = C$.

6. A, B, C উপযুক্ত ক্রমের ম্যাট্রিক্স, $\det A \neq 0$ এবং $BA = CA \Rightarrow B = C$.

7. A একটি অবিশিষ্ট্য (non-singular) প্রতিসম (symmetric) ম্যাট্রিক্স হলে, A^{-1} ম্যাট্রিক্সটিও প্রতিসম হবে।

টীকা ঃ একটি বিজোড় ক্রমের বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক শূন্য হয় এবং জোড় ক্রমের বেলায় তার মান পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়।

অনুশীলনী

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ হলে, $A^2 + 5I_2 =$

(a) $\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 19 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 13 & 39 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 39 & 13 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ হলে, $A^2 + 3A^T =$

(a) $\begin{pmatrix} 28 & 12 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 22 & 21 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 21 & 10 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ হলে, $A^{-1} + 2A^T =$

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ হলে, $(A^{-2}. B)^T =$

(a) $\begin{pmatrix} 103 & -36 \\ 37 & -13 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 103 & 37 \\ -36 & -13 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -57 & 59 \\ 32 & -33 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -57 & 32 \\ 59 & -33 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ হলে, $A^2 - 4I_2 =$

(a) 0 (b) I (c) $5I_2$ (d) $-5I_2$.

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ হলে, $A^2 + I_3 =$

(a) 0 (b) $2I_3$ (c) $-2I_3$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ হলে, $(A + I_2)(A - 6I_2) =$

(a) 0 (b) $6I_2$ (c) $12I_2$ (d) $-12I_2$.

8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ হলে, $A^3 - 16I_3 =$

(a) $-4I_3$ (b) $48I_3$ (c) $-48I_3$ (d) 0.

9. $A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ হলে, $A^{23} =$

(a) $-A$ (b) A (c) I_2 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

10. A একটি 3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে

(a) $\det(A - A^T) = 0$

(b) $A - A^T$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(c) $A - A^T$ একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

11. ধরি A একটি 3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং A = B – C, যেখানে B একটি প্রতিসম ও C একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ হলে, C =

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $f(x) = x^2 + 4x - 5$ এবং $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ হলে, $f(A) =$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$.

13. A একটি 2 ক্রমের বীপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে

(a) A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে না

(b) A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং তা একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হবে

(c) A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং তা একটি অবিশিষ্ট্য ম্যাট্রিক্স হবে

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

14. ধরি A একটি 2 ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্স। তাহলে

(a) A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং তা হবে একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(b) A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং তা হবে একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স

(c) A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে কিন্তু তা বীপ্রতিসম নাও হতে পারে

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

15. A এবং B সমান দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যে AB = A এবং BA = B, তাহলে $B^2 =$

(a) I_2 (b) A (c) B (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

16. $A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ হলে, AB =

(a) I_3 (b) $-I_3$ (c) $2I_3$ (d) O.

17. A এবং B এমন দুটি ম্যাট্রিক্স যে BA = A এবং AB = B হয়; তাহলে $A^2 + B^2 =$

(a) AB (b) 2AB (c) BA (d) A + B.

18. B একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স, যার প্রতিটি পদ ধনাত্মক। যদি $B^2 = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ হয়, তবে B =

(a) $\begin{pmatrix} \sqrt{17} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{17} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ বা $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ বা $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

19. যদি $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$-এর গুণফল বিনিময়যোগ্য হয়, তবে $b^2 + c^2 =$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

20. A একটি উল্লম্ব ম্যাট্রিক্স এবং P একটি বীপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $A^{-1}PA$

(a) একটি উল্লম্ব ম্যাট্রিক্স (b) একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(c) একটি বীপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ হলে, $(aA + bB)(aA - bB) =$

(a) $a^2A^2 - b^2B^2$ (b) $(a^2 - b^2)A^2$

(c) $(a^2 + b^2)A^2$ (d) $(a^2 + b^2)(A^2 - B^2)$.

22. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ এবং $5A + 3B + 2C$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স; তবে C =

(a) $\begin{pmatrix} -24 & -10 \\ -\frac{41}{2} & -\frac{51}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -24 & -10 \\ -41 & -51 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -24 & -10 \\ -41 & -\frac{51}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -24 & -10 \\ -\frac{41}{2} & -51 \end{pmatrix}$.

23. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ এবং যদি $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ হয়, তবে $a^2 + b^2$-এর মান

(a) 5 (b) 9 (c) 17 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ এবং $(xA + yI_2)^2 = A$ হলে, $x^2 + y^2$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

25. A এবং B দুটি 2 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে এবং যদি $2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ ও $A + B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ হয়, তবে B =

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

26. A এবং B দুটি 2 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $2A + 3B = I_2$ ও $A + B = 2A^T$ হলে A =

(a) $5I_2$ (b) $-5I_2$ (c) $\frac{1}{5}I_2$ (d) $-\frac{1}{5}I_2$.

27. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ হলে AA^T ম্যাট্রিক্সটি হবে

(a) প্রতিসম (b) বিপ্রতিসম (c) উল্লম্ব (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

28. A একটি 3×4 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং B একটি এমন ক্রমের ম্যাট্রিক্স যে A^TB এবং BA^T উভয়েই সংজ্ঞাত। B-এর ক্রম হবে

(a) 3×3 (b) 4×4 (c) 4×3 (d) 3×4.

29. নীচের বিবৃতিগুলির মধ্যে কোনটি সত্য বল।

(a) A প্রতিসম হলে $B^TA\,B$ প্রতিসম হবে

(b) A প্রতিসম হলে $B^TA\,B$ বিপ্রতিসম হবে

(c) A বিপ্রতিসম হলে $B^TA\,B$ প্রতিসম হবে

(d) A বিপ্রতিসম হলে $B^TA\,B$ বিপ্রতিসম হবে না।

30. ধরি $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. যদি X ম্যাট্রিক্সটি এমন হয় যে BX = A, তাহলে X =

(a) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

31. $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ হলে, $(A + B)(A - B) =$

(a) $A^2 + B^2$ (b) $A^2 - B^2$ (c) $A^2 - 2AB + B^2$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

32. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ হলে Adj A =

(a) $3A^T$ (b) $\frac{1}{3}A^T$ (c) $-3A^T$ (d) $-\frac{1}{3}A^T$.

33. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc+1}{a} \end{pmatrix}$ এবং $A + A^{-1} = KI_2$ হলে K =

(a) $\frac{a^2 - bc + 1}{a}$ (b) $\frac{a^2 + bc - 1}{a}$ (c) $\frac{a^2 - bc - 1}{a}$ (d) $\frac{a^2 + bc + 1}{a}$.

34. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ হলে A =

(a) $\begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 24 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -24 & 5 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -16 & 3 \\ 24 & -5 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

35. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta \\ -\tan\theta & 1 \end{pmatrix}$ হলে, $AB^{-1} =$

(a) $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$.

36. A এবং B দুটি n ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হলে, $(AB - BA)$ ম্যাট্রিক্সটি

(a) প্রতিসম (b) বিপ্রতিসম

(c) একক (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

37. ধরি $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ যেখানে $a_{ij} = i + j$, তাহলে $A^2 =$

(a) $\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 25 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 18 & 25 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

38. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ হলে, যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্যে $A^n =$

(a) $\begin{pmatrix} (-1)^n & 2n \\ 4n & 3(-1)^n n \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -n & 2n \\ 4n & -3n \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} n-2 & 2+n \\ 3+n & n-4 \end{pmatrix}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

39. যদি $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}^n$ হয়, যেখানে n সংখ্যাটি 3-এর অখন্ড গুণিতক এবং ω হল 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল, তাহলে $a - b + c - d$ এর মান

(a) 3 (b) – 7 (c) – 3 (d) 7.

40. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ হলে, $A^2 =$

(a) I_3 (b) A (c) – A (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

41. $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ হলে, $A =$

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

42. $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ হলে, $A(\alpha + \beta) =$

(a) $A(\alpha) + A(\beta)$ (b) $A(\alpha)\ A(\beta)^{-1}$

(c) $A(\alpha).\ A(\beta)$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

43. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ হলে, নীচের বিবৃতিগুলির কোন্‌টি সত্য বল।

(a) $A^2 = I_3$. (b) A একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স। (c) $A = -I_3$. (d) A^{-1}-এর অস্তিত্ব নেই।

44. $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 2 & x & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ এবং A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে; তাহলে

(a) $x \neq 4$ (b) $x \neq -4$ (c) $x \neq 8$ (d) $x \neq -8$.

45. যদি $M_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ হয় এবং যদি $M^2 =$ $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ হয়, তবে $M^2 =$

(a) $\frac{9}{4}I_2$ (b) $-\frac{9}{4}I_2$ (c) $-\frac{3}{4}I_2$ (d) $\frac{3}{4}I_2$.

46. ধরি A একটি 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স (a_{ij}) যেখানে $a_{ij} = \frac{3i-2j}{2}$, তাহলে Adj A =

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

47. $A_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}^k$ হলে, k-এর যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যামানে $A_k = I_2$ হয় তা হল

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16.

48. B একটি অবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স এবং A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে det $(B^{-1}\ AB)$-এর মান হবে

(a) det (A) (b) − det (A) (c) det (B) (d) det (B^{-1}).

49. যদি θ এবং ϕ দুটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং যদি $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ হয়, যেখানে $A(\theta)\ A(\phi) = 0$, তাহলে $|\ \theta - \phi\ |$ এর মান

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 0.

50. যদি A এবং B দুটি 3×3 ক্রমের এমন ম্যাট্রিক্স যে $B^TAB = A$ হয়, তবে det B এর মান হবে

(a) 1 (b) − 1 (c) ± 1 (d) ± 1, যদি A অবিশিষ্ট হয়।

51. ধরি A একটি বিপ্রতিসম এবং B একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স যার ক্রম k. যদি kAB + 5BA বিপ্রতিসম হয় এবং যদি AB $\neq$ BA হয়, তাহলে

(a) $k = 5$ (b) -5 (c) ± 5 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

52. $1, \omega, \omega^2$ হল 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল; তাহলে যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্যে

$\begin{vmatrix} 1 & \omega^n & \omega^{2n} \\ \omega^{2n} & 1 & \omega^n \\ \omega^n & \omega^{2n} & 1 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) ω (d) ω^2.

53. $\begin{vmatrix} \log_3 4 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) log 2 log 3 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$.

54. $\begin{vmatrix} 1 & 21 & 25 \\ 0 & \sec\theta & \tan\theta \\ 0 & \tan\theta & \sec\theta \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 525 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

55. ধরি a, b, c একটি গুণোত্তর প্রগতির p-তম, q-তম ও r-তম পদ এবং $a, b, c > 0$; তাহলে

$\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.

56. যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির সব পদ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ধনাত্মক হয়, তবে

$$\begin{vmatrix} \log a_n & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} & \log a_{n+7} & \log a_{n+8} \end{vmatrix}\text{-এর মান}$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

57. যদি একটি সমান্তর প্রগতির p-তম, q-তম ও r-তম পদ a, b, c হয়, তবে $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $p + q + r$.

58. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ এবং $(\det A)^3 = 125$ হলে, α-এর মান

(a) ± 1 (b) ± 2 (c) ± 3 (d) ± 5.

59. 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, নীচের সমীকরণ

$$\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = 0$$-এর একটি বীজ হবে

(a) 0 (b) 1 (c) ω (d) ω^2.

60. $a + b + c = 0$ হলে, $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ হবে

(a) 0 (b) 1 (c) abc (d) $a^2 + b^2 + c^2$.

61. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

62. a, b, c অশূন্য বাস্তব সংখ্যা হলে, $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$ -এর একটি উৎপাদক হবে

(a) 0 (b) $a + b + c$ (c) $1 + a + b + c$ (d) $1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

63. $A = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix}$ এবং $B = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ হলে

(a) $A = 2B$ (b) $A = \frac{1}{2}B$ (c) $A = 3B$ (d) $A = \frac{1}{3}B$.

64. $\begin{vmatrix} 1 & 1+ac & 1+bc \\ 1 & 1+ad & 1+bd \\ 1 & 1+ac & 1+bc \end{vmatrix}$-এর মান

(a) $a + b + c + d + e$ (b) $3 + a + b + c + d + e$ (c) 1 (d) 0.

65. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4.

66. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = k\, a^2b^2c^2$ হলে, k-এর মান

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4.

67. $i^2 = -1$ হলে, যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্যে $\begin{vmatrix} i^n & i^{n+1} & i^{n+2} \\ i^{n+5} & i^{n+4} & i^{n+3} \\ i^{n+6} & i^{n+7} & i^{n+8} \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 1, যদি n সংখ্যাটি 4-এর গুণিতক হয়

(b) i, যদি n সংখ্যাটি 4-এর গুণিতক হয়

(c) $(-i)^n$, n-এর সব মানে n-এর সব মানে

(d) 0, n-এর সব মানে।

68. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (2^x+2^{-x})^2 & (3^x+3^{-x})^2 & (5x+5^{-x})^2 \\ (2^x-2^{-x})^2 & (3^x-3^{-x})^2 & (5^x-5^{-x})^2 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) $2(2^x + 3^x + 5^x)$ (c) $2^x.3^x.5^x$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

69. α, β, γ যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে $\begin{vmatrix} (e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})^2 & (e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})^2 & 1 \\ (e^{+i\beta}+e^{-i\beta})^2 & (e^{i\beta}+e^{-i\beta})^2 & 1 \\ (e^{i\gamma}+e^{-i\gamma})^2 & (e^{i\gamma}+e^{-i\gamma})^2 & 1 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$ (b) $e^{-i(\alpha+\beta+\gamma)}$ (c) $e^{i\alpha\beta\gamma}$ (d) 0.

70. $\begin{vmatrix} 0 & a-b & a-c \\ b-a & 0 & b-c \\ c-a & c-b & 0 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) $2(a+b+c)$ (b) $ab+bc+ca$ (c) 0 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

71. $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ হলে, $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix}$-এর একটি বীজ হবে

(a) $x = a$ (b) $x = b$ (c) $x = c$ (d) $x = 0$.

72. $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 3a & 4a+3b & 5a+4b+3c \\ 6a & 9a+6b & 11a+9b+6c \end{vmatrix}$-এর মান

(a) a^3 (b) abc (c) $-a^3$ (d) $-abc$.

73. $\begin{vmatrix} 3x+y & 2x & x \\ 4x+3y & 3x & 3x \\ 5x+6y & 4x & 6x \end{vmatrix}$-এর মান

(a) x^3 (b) xyz (c) $-x^3$ (d) $-xyz$.

74. $\begin{vmatrix} x+y & x & x \\ 5x+4y & 4x & 2x \\ 10x+8y & 8x & 3x \end{vmatrix}$-এর মান

(a) x^3 (b) $-x^3$ (c) xyz (d) $-xyz$.

75. A একটি 2 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে adj(adj A) =

(a) A^{-1} (b) det A (c) A (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

76. A একটি 3 ক্রমের অশূন্য বর্গ ম্যাট্রিক্স হলে, A(adj A) =

(a) det A.I_3 (b) $(\det A)^3.I_3$ (c) I_3 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

77. A একটি 3 ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং det A = 2 হলে, det (adj (adj A))-এর মান

(a) 2^4 (b) 2^3 (c) 2^9 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

78. $\begin{vmatrix} xp+y & x & y \\ yp+z & y & z \\ \mathbf{0} & xp+y & yp+z \end{vmatrix} = 0$ যেখানে p যেকোনো বাস্তব সংখ্যা; তাহলে

(a) x, y, z সমান্তর প্রগতিতে আছে (b) x, y, z গুণোত্তর প্রগতিতে আছে

(c) x, y, z বিপরীত প্রগতিতে আছে (d) xy, yz, zx সমান্তর প্রগতিতে আছে।

79. a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & b \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 1 (b) 0 (c) – 1. (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

80. $i^2 = -1$ এবং 1-এর একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & 1+i+\omega^2 \\ -i & -1 & -1-i+\omega \\ 1-i & \omega^2-1 & -1 \end{vmatrix}\text{-এর মান}$$

(a) 0 (b) i (c) ω (d) ω^2.

81. $ax^3 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$-এর বীজ α, β এবং γ হলে, $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$-এর মান

(a) a (b) $-b$ (c) $\frac{c}{a}$ (d) 0.

[**সংকেত ঃ** ত্রিঘাত সমীকরনে বীজগুলিরসমষ্টি = $-\dfrac{x^2\text{-এর সহগ}}{x^3\text{-এর সহগ}}$]

82. যদি a, b, c সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) $(x+b)^3$ (c) $\dfrac{(x+1)(x+4)(x+b)}{4}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

83. $\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \\ 3! & 4! & 5! \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 2! (b) 3! (c) 4! (d) 5!.

84. $\begin{vmatrix} {}^8C_3 & {}^9C_5 & {}^{10}C_7 \\ {}^8C_4 & {}^9C_6 & {}^{10}C_8 \\ {}^9C_{n+1} & {}^{10}C_{3n-3} & {}^{11}C_{2n+2} \end{vmatrix} = 0$ হলে, n-এর মান

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4.

85. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ {}^nC_1 & {}^{n+1}C_1 & {}^{n+2}C_1 \\ {}^nC_2 & {}^{n+1}C_2 & {}^{n+2}C_2 \end{vmatrix}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{n(n+1)}{6}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

86. $f(n) = \begin{vmatrix} 2^n & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & n \\ x & y & z \\ \frac{p+1}{2-1} & \frac{p+1}{p+2} & \frac{p(p+1)}{2} \end{vmatrix}$ হলে, $\sum_{n=0}^{p} f(n)$-এর মান

(a) 0 (b) – 1 (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

87. $f(n) = \begin{vmatrix} 1 & p & p \\ 2n & p^2+p+1 & p^2+1 \\ 2n-1 & p^2 & p^2 \end{vmatrix}$ হলে, $\sum_{n=1}^{p} f(n)$-এর মান

(a) 0 (b) $p^2(p^2 + 1)$ (c) $p^2(p^2 - 1)$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

88. $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ \cos nx & \cos(n+1)x & \cos(n+2)x \\ \sin nx & \sin(n+1)x & \sin(n+2)x \end{vmatrix}$-এর মান যে চিহ্নের উপর নির্ভর করে না তা হল

(a) x (b) a (c) n (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

89. $f(n) = \begin{vmatrix} 2n-1 & {}^mC_n & 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2 m & \sin m^2 & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$ হলে, $\sum_{n=0}^{m} f(n)$-এর মান

(a) 0 (b) $2m$ (c) $m(m + 1) \sin 2m$ (d) $2m \sin 2m$.

90. $f(x) = \begin{vmatrix} \cos^2 x & \cos x.\sin x & -\sin x \\ \cos x.\sin x & \sin^2 x & \cos x \\ \sin x & -\cos x & 0 \end{vmatrix}$ হলে, x-এর সব মানে

(a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) = -1$ (d) $f(x) = 2$.

91. $f(x) = \begin{vmatrix} x & \alpha & 1 \\ \alpha & x & 1 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ হলে, নীচের কোনটি $f(x) = 0$-এর বীজ হবে?

(a) α (b) β (c) γ (d) 0.

92. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 21 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ হলে, det (adj (adj A))-এর মান

(a) – 81 (b) 81 (c) – 9 (d) 9.

93. $A + B + C = \pi$ হলে, $\begin{pmatrix} \tan(A+B+C) & \tan C & \cos C \\ \tan(A+B) & 0 & \sin B \\ \cos(A+B) & -\sin B & 0 \end{pmatrix}$-এর মান

(a) – 1 (b) 0 (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

94. $2x - z = 1$, $2x + 4ky - z = 1$, $x - 8y - 3z = -2$ সহ-সমীকরণ-এর অনন্য সমাধান থাকবে যখন

(a) $k = 0$ (b) $k \neq 0$ (c) $k = 1$ (d) $k \neq 1$.

95. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{N}$ হলে.

(a) ঠিক একটিই এমন B থাকবে যে AB = BA হয়

(b) এমন অগুনতি B থাকবে যে AB = BA হয়

(c) এমন কোনও B থাকবে না যে AB = BA হয়

(d) এমন একাধিক (কিন্তু সীমিত সংখ্যক) B থাকবে যাতে AB = BA হয়।

[AIEEE, 2006]

উত্তর

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	●	○	○	○
2.	○	○	●	○
3.	○	●	○	○
4.	○	○	○	●
5.	○	○	○	●
6.	○	●	○	○
7.	○	○	○	●
8.	○	●	○	○
9.	●	○	○	○
10.	●	○	○	○
11.	○	●	○	○
12.	○	○	○	●
13.	○	○	●	○
14.	○	○	○	●
15.	○	○	●	○
16.	○	○	○	●
17.	○	○	○	●
18.	○	●	○	○
19.	●	○	○	○
20.	○	○	●	○
21.	○	○	●	○
22.	●	○	○	○
23.	○	○	●	○
24.	○	●	○	○
25.	●	○	○	○
26.	○	○	●	○
27.	●	○	○	○
28.	○	○	○	●
29.	●	○	○	○
30.	○	●	○	○
31.	○	●	○	○
32.	●	○	○	○
33.	○	○	○	●
34.	○	○	●	○
35.	○	○	○	●
36.	○	●	○	○
37.	○	○	●	○
38.	○	○	○	●
39.	○	○	●	○
40.	○	○	○	●
41.	○	●	○	○
42.	○	○	●	○
43.	●	○	○	○
44.	○	○	●	○
45.	●	○	○	○
46.	○	○	●	○
47.	○	○	●	○
48.	●	○	○	○
49.	○	●	○	○
50.	○	○	○	●
51.	●	○	○	○
52.	●	○	○	○
53.	○	○	○	●
54.	○	●	○	○
55.	●	○	○	○
56.	●	○	○	○
57.	●	○	○	○
58.	○	○	●	○
59.	●	○	○	○
60.	●	○	○	○
61.	●	○	○	○
62.	○	○	○	●
63.	●	○	○	○
64.	○	○	○	●
65.	○	○	○	●
66.	○	○	○	●
67.	○	○	○	●
68.	●	○	○	○
69.	○	○	○	●
70.	○	○	●	○
71.	○	○	○	●
72.	○	○	●	○
73.	●	○	○	○
74.	●	○	○	○
75.	○	○	●	○
76.	●	○	○	○
77.	●	○	○	○
78.	○	●	○	○
79.	○	●	○	○
80.	●	○	○	○
81.	○	○	○	●
82.	●	○	○	○
83.	○	○	●	○
84.	○	○	●	○
85.	○	●	○	○
86.	●	○	○	○
87.	●	○	○	○
88.	○	○	●	○
89.	●	○	○	○
90.	○	●	○	○
91.	●	○	○	○
92.	○	●	○	○
93.	○	●	○	○
94.	○	●	○	○
95.	○	●	○	○

সংকেত/সমাধান

1. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$, সুতরাং $A^2 + 5I = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 19 \end{pmatrix}$.

2. (c) এখানে $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$,

সুতরাং $A^2 + 3A^T = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 21 & 10 \end{pmatrix}$.

3. (b) এখানে $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; সুতরাং $A^{-1} + 2A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. (d) এখানে $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 25 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; সুতরাং $A^{-2} = (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -25 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$.

$\therefore A^{-2}.B = \begin{pmatrix} -57 & 59 \\ 32 & -33 \end{pmatrix}$; সুতরাং $(A^{-2}.B)^T = \begin{pmatrix} -57 & 32 \\ 59 & -33 \end{pmatrix}$.

5. (d) এখানে $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$; সুতরাং $A^2 + I_2 = 0. \Rightarrow A^2 - 4I_2 = -5I_2$.

6. (b) এখন $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. সুতরাং $A^2 + I_3 = 2I_3$.

7. (d) এখানে $A + I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ এবং $A - 6I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$.

সুতরাং $(A + I_2)\,(6A - 6I_2) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_2$.

8. (b) এখন $A^3 = \begin{pmatrix} 4^3 & 0 & 0 \\ 0 & 4^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$.

সুতরাং $A^3 - 16I_3 = \begin{pmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix} = 48\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 48I_3$.

9. (a) এখানে $A^{24} = \begin{pmatrix} (-1)^{24} & 0 \\ 0 & (-i)^{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. সুতরাং $A^{23} = A^{-1} = -A$.

10. (a) আমরা জানি যে কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্যে $A - A^T$ বিপ্রতিসম হয়, এবং যেহেতু যেকোনো বিপ্রতিসম বিজোড় ক্রমের ম্যাট্রিক্সই বিশিষ্ট, সুতরাং $\det(A - A^T) = 0$.

11. **(b)** $A = B - C$ এবং $A^T = B^T - C^T = B + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}(A^T - A)$;

তাই এখানে $C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

12. **(d)** এখানে $f(A) = A^2 + 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

13. **(c)** ধরি $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in R$ এবং $a \neq 0$; তাহলে $\det A = a^2 \neq 0$ সুতরাং A^{-1}-এর

অস্তিত্ব আছে এবং $A^{-1} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ যা আবার বিপ্রতিসম। স্পষ্টতই

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{a^2} \neq 0$ সুতরাং A^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে এবং তা অবিশিষ্ট্য ম্যাট্রিক্স।

14. **(d)** ধরি $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$; $a, b, c \in R$ এবং $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. তাহলে

$\det A = ac - b^2$; তাই, যদি $ac = b^2$ হয় তবে A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে না। অতএব কোনো প্রতিসম ম্যাট্রিক্স-এর বিপরীত নাও থাকতে পারে। [উদাহরণ ঃ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ হলে A^{-1}-এর অস্তিত্ব থাকবে না।]

15. **(c)**
$$\begin{aligned} B^2 &= B.B = (BA).B \quad [\because B = BA] \\ &= B(A.B) = B.A \quad [\because AB = A] \\ &= B \quad [\because BA = B]. \end{aligned}$$

16. **(d)** $AB = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17. **(d)**
$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= A.A + B.B = A.(BA) + B.(AB) \\ &= (AB).A + (BA)B = BA + AB = A + B. \end{aligned}$$

18. **(b)** যেহেতু B^2 প্রতিসম এবং B-এর সব পদই ধনাত্মক, তাই B-ও প্রতিসম হবে।

ধরি $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ তাহলে $B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bc \\ ab + bc & b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = 17 \Rightarrow a^2 = c^2$ এবং $a^2 + b^2 = 17$, $2ab = 8$

[সব পদই ধনাত্মক বলে $a \neq -c$]

$\therefore a + b = \pm 5, a - b = \pm 3 \quad \therefore a = 4, b = 1$ বা, $a = 1, b = 4$

[লক্ষ কর যে অন্য সম্ভাবনাগুলিতে হয় a নতুবা b ঋণাত্মক]

সুতরাং $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ বা $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

19. **(b)** $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = c = 0$, সুতরাং $b^2 + c^2 = 0$.

20. **(c)** প্রশ্ন অনুযায়ী $AA^T = I$ এবং $P^T = -P$.

সুতরাং $(A^{-1} PA)^T = (A^T . PA)^T \; [\because A^{-1} = A^T]$

$= A^T P^T (A^T)^T = A^{-1}.(-P).A = -A^{-1}PA$

সুতরাং $A^{-1}PA$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

21. **(c)** এখানে $(aA + bB)(aA - bB)$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a^2 + \mathrm{b}^2)A^2.$

22. **(a)** $5A + 3B + 2C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}(5A + 3B) = \begin{pmatrix} -24 & -10 \\ -\frac{41}{2} & -\frac{51}{2} \end{pmatrix}$.

23. **(c)** এখানে $AB = \begin{pmatrix} a-b & 2 \\ 2a-b & 3 \end{pmatrix}$ এবং $BA = \begin{pmatrix} a+2 & -a-1 \\ b-2 & -b+1 \end{pmatrix}$.

এখন $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

$\Rightarrow AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA \Rightarrow \begin{pmatrix} a-b & 2 \\ 2a-b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2 & a+1 \\ 2-b & b-1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a + 1 = 2, b - 1 = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 17.$

24. **(b)** এখন $xA + yI_2 = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ -x & y \end{pmatrix}$. তাই $(xA + yI_2)^2 = \begin{pmatrix} (x+y)^2 & 0 \\ -x^2-2xy & y^2 \end{pmatrix}$.

সুতরাং $(xA + yI_2)^2 = A \Rightarrow (x + y)^2 = 1, y^2 = 0, x^2 + 2xy = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$

25. **(a)** ধরি $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. এখন প্রদত্ত প্রশ্নের দুটি ম্যাট্রিক্স সমীকরণ থেকে পাই

$3B - 2B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ বা, $\begin{pmatrix} a & 3b-2c \\ 3c-2b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

বা, $a = 2, d = 0, 3b - 2c = 1$ এবং $3c - 2b = 1$ বা, $a = 2, d = 0, b = c = 1.$

সুতরাং $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

26. **(c)** ধরি $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

এখন, $2A + 3B = I_2$ এবং $A + B = 2A^T \Rightarrow A = 6A^T - I_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 6c \\ 6b & 6d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-1 & 6c \\ 6b & 6d-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = d = \frac{1}{5},\ b = c = 0. \qquad \therefore A = \frac{1}{5}\ I_2.$$

27. **(a)** এখানে $AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

সুতরাং $(AA^T)^T = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = AA^T$.

28. **(d)** এখন A^T একটি 4×3 ম্যাট্রিক্স। যেহেতু A^TB সংজ্ঞাত, তাই B হবে $3 \times p$ ম্যাট্রিক্স এবং যেহেতু BA^T সংজ্ঞাত, তাই $p = 4$. সুতরাং B-এর ক্রম হবে 3×4.

29. **(a)** A প্রতিসম হলে, $(B^T AB)^T = B^TA^TB = B^TAB$; সুতরাং (a) সত্য।

A বিপ্রতিসম হলে, $(B^T AB)^T = B^TA^TB = -B^TAB$

অর্থাৎ, (c) বা (d)-এর কোনোটিই সত্য নয়।

30. **(b)** এখানে $X = B^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

31. **(b)** এখানে $AB = i(-i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$.

সুতরাং $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$.

32. **(a)** $$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}^T = 3\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T = 3A^T.$$

33. **(d)** $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc+1}{a} \end{pmatrix} + \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \frac{bc+1}{a} & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a^2+bc+1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a^2+bc+1}{a} \end{pmatrix} = \frac{a^2+bc+1}{a}\, I_2.$$

34. **(c)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -14 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 3 \\ 24 & -5 \end{pmatrix}.$$

35. **(d)** $AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sec^2\theta}\begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta \\ \tan\theta & 1 \end{pmatrix}$

$$= \cos^2\theta \begin{pmatrix} 1-\tan^{2}\theta & -2\tan\theta \\ 2\tan\theta & 1-\tan^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

36. **(b)** প্রশ্ন অনুসারে, $A^T = A$ এবং $B^T = B$.

এখন, $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^TA^T - A^TB^T$

$$= BA - AB = -(AB - BA).$$

37. **(c)** এখানে $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, তাই $A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 18 & 25 \end{pmatrix}$.

38. **(d)** এখানে $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -16 & 17 \end{pmatrix}$, যা থেকে পাই যে $n = 2$ হলে (a), (b), (c) কোনোটিই A^n-এর সমান নয়, সুতরাং সঠিক উত্তর হবে (d).

39. **(c)** ধরি $n = 3m$, $m \in \mathbb{Z}$, তাহলে $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}^{3m}$

$$= \begin{pmatrix} \omega^3 & 0 \\ 0 & \omega^6 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

সুতরাং $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$\therefore a = -3 = d, b = 5$ এবং $c = 2$; সুতরাং $a - b + c - d = -3 - 5 + 2 + 3 = -3$.

40. **(d)** স্পষ্টতই এখানে $A^2 = O_{3\times 3}$.

41. **(b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ হলে,

$\text{adj A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ হলে, $\text{adj A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. সুতরাং (b) হল সঠিক উত্তর।

42. (c) $$A(\alpha)\,A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) & 0 \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(\alpha+\beta).$$

যেহেতু $A(\beta) \neq A(\beta)^{-1}$ তাই (b) সঠিক নয়; এবং $A(\alpha) + A(\beta) = A(\alpha+\beta) \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = \cos(\alpha+\beta)$ — যা অভেদ নয়; সুতরাং (a) সর্বদা সত্য নাও হতে পারে।

43. (a) $\det A \neq 0$ এবং তাই A^{-1} বর্তমান। সুতরাং (d) সত্য নয়।

আবার, $-A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3$ এবং তাই (c) সত্য নয়। আবার সংজ্ঞা অনুযায়ী (b) সত্য হতে পারে না। সুতরাং (a) সত্য হবে।

44. (c) $\det(A) = 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(1) + 4 - x = 8 - x.$

অর্থাৎ A^{-1} থাকবে কেবলমাত্র যদি $8 - x \neq 0$ হয়, অর্থাৎ $x \neq 8$ হয়।

45. (a) $M^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \frac{9}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

46. (c) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, অর্থাৎ $\text{Adj A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

47. (c) k ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বলে, $A_k = \begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi}{4} & -\sin\frac{k\pi}{4} \\ \sin\frac{k\pi}{4} & \cos\frac{k\pi}{4} \end{pmatrix}$

প্রশ্ন অনুসারে $\cos\frac{k\pi}{4} = 1$ এবং $\sin\frac{k\pi}{4} = 0$

সুতরাং k-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মান হল 8.

48. (a) $\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1}).\det(A).\det(B) = \det(B^{-1}).\det B.\det A$

$= \det(B^{-1}B).\det(A).1.\det A = \det A.$

49. (b) $A(\theta)\,A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta.\cos\phi\cos(\theta-\phi) & \cos\theta.\sin\phi\cos(\theta-\phi) \\ \sin\theta.\cos\phi\cos(\theta-\phi) & \sin\theta.\sin\phi\cos(\theta-\phi) \end{pmatrix}$

(লক্ষ্য কর $\cos\theta\ \cos\phi = \cos\theta\ \sin\phi = \sin\theta\ \cos\phi = \sin\theta\ \sin\phi = 0$ যা অসম্ভব)

$$= \cos(\theta - \phi)\begin{pmatrix}\cos\theta.\cos\phi & \cos\theta.\sin\phi \\ \sin\theta.\cos\phi & \sin\theta.\sin\phi\end{pmatrix} = O$$

$\Rightarrow \cos(\theta - \phi) = 0 \;/ \Rightarrow |\theta - \phi| = \frac{\pi}{2}.$

50. **(d)** $\det(B^T AB) = \det(B^T) \det A.\det B = (\det B)^2 \det A = \det A$

$(\because \det B^T = \det B)$

$\Rightarrow \det A\{(\det B)^2 - 1\} = 0$

$\Rightarrow \det B = \pm 1$ যদি $\det A \neq 0$ হয়, অর্থাৎ যদি A অবিশিষ্ট হয়।

51. **(a)** প্রশ্ন অনুসারে $(kB + 5BA)^T = -(kAB + 5BA)$.

$\Rightarrow kB^TA^T + 5A^TB^T = -(kAB + 5BA)$

$\Rightarrow -kBA - 5AB = -(kAB + 5BA) \Rightarrow (k - 5)(AB - BA) = O$

$\Rightarrow k = 5 \;(\because AB \neq BA)$.

52. **(a)** উত্তরের সূত্র অনুসারে, উত্তর n নিরপেক্ষ হবে। $n = 1$ বসাও এবং $c_1' \to c_1 + c_2 + c_3$ প্রয়োগ কর।

তাহলে, $\begin{vmatrix}1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ 1+\omega+\omega^2 & 1 & \omega \\ 1+\omega+\omega^2 & \omega^2 & 1\end{vmatrix} = 0$ [যেহেতু $1 + \omega + \omega^2 = 0$].

53. **(d)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix}2\log_3 2 & \frac{1}{2}\log_2 3 \\ 3\log_3 2 & \frac{2}{2}\log_2 3\end{vmatrix} = 2\log_3 2\log_2 3 - \frac{3}{2}\log_3 2\log_2 3$

$$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left[\because \log_3 2 \times \log_2 3 = 1\right].$$

54. **(b)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix}\sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta\end{vmatrix}$ [প্রথম স্তম্ভ বরাবর বিস্তৃত করে]

$= \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1.$

55. **(a)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix}\log(xy^{p-1}) & p & 1 \\ \log(xy^{q-1}) & q & 1 \\ \log(xy^{r-1}) & r & 1\end{vmatrix}$ [যেখানে গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদ x এবং সাধারন অনুপাত y]

$$= \begin{vmatrix}\log x & p & 1 \\ \log x & q & 1 \\ \log x & r & 1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(p-1)\log y & p & 1 \\ (q-1)\log y & q & 1 \\ (r-1)\log y & r & 1\end{vmatrix}$$

$$= \log x\begin{vmatrix}1 & p & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & r & 1\end{vmatrix} + \log y\begin{vmatrix}p-1 & p-1 & 1 \\ q-1 & q-1 & 1 \\ r-1 & r-1 & 1\end{vmatrix}$$

[দ্বিতীয় নির্ণায়কে $C_2' = C_2 - C_3$]

$= \log x.0 + \log y.0 = 0.$

56. **(a)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} \log a_n + \log a_{n+2} & \log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ \log a_{n+3} + \log a_{n+5} & \log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ \log a_{n+6} + \log a_{n+8} & \log a_{n+7} & \log a_{n+6} \end{vmatrix}$ $[C_2' = C_2 + C_3]$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2\log a_{n+1} & 2\log a_{n+1} & \log a_{n+2} \\ 2\log a_{n+4} & 2\log a_{n+4} & \log a_{n+5} \\ 2\log a_{n+7} & 2\log a_{n+7} & \log a_{n+6} \end{vmatrix}$ [যেহেতু a_1, a_2, a_3 ... গুণোত্তর প্রগতিতে আছে, অতএব $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots$ সমান্তর প্রগতিতে থাকবে।]

$= \frac{1}{2}.0 = 0.$

57. **(a)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} x+(p-1)y & x+(q-1)y & x+(r-1)y \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

[যেখানে x এবং y হলে সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর]

$= x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} p-1 & q-1 & r-1 \\ p-1 & q-1 & r-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ [দ্বিতীয় নির্ণায়কে $R_2' = R_2 - R_3$]

$= x.0 + y.0 = 0.$

58. **(c)** $(\det A)^3 = 125$ এবং $\det A$ বাস্তব $\Rightarrow \det A = 5.$

আবার $\det A = \alpha^2 - 4$, তাই $\alpha^2 - 4 = 5 \Rightarrow \alpha = \pm 3.$

59. **(a)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} x+1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ x+1+\omega+\omega^2 & x+\omega^2 & 1 \\ x+1+\omega+\omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix}$

$= x\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & x+\omega^2 & 1 \\ 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix}$ [যেহেতু $1 + \omega + \omega^2 = 0$].

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ হল $x = 0.$

60. **(a)** 59-এর অনুরূপ।

61. **(a)** প্রদত্ত নির্ণায়ককে $C_1' = C_1 + C_2 + C_3$ প্রয়োগ করে পাই, $\begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0.$

62. **(d)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$

$$= abc \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}.$$

63. **(a)** $A = 2\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ a+b+c & c+a & a+b \\ a+b+c & a+b & b+c \end{vmatrix}$ $[C_1' = C_1 + C_2 + C_3]$

$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & -a & -b \\ a+b+c & -b & -c \\ a+b+c & -c & -a \end{vmatrix}$ $[C_2' = C_2 - C_1$ এবং $C_3' = C_3 - C_1]$

$= 2\begin{vmatrix} c & -a & -b \\ a & -b & -c \\ b & -c & -a \end{vmatrix}$ $[C_1' = C_1 + C_2 + C_3]$

$= 2\begin{vmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = 2(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ $[C_{12}$ এবং তারপরে $C_{23}]$

$= 2B.$

64. **(d)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & ac & bc \\ 1 & ad & bd \\ 1 & ac & bc \end{vmatrix} = ab\begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 1 & d & d \\ 1 & c & c \end{vmatrix} = ab.0 = 0$

[$\because R_1$ এবং R_3 অবিকল একই]

65. **(d)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $[C_1' = C_1 + C_2]$ $= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$

66. **(d)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= a^2b^2c^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ [প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় সারি ও স্তম্ভ থেকে a, b, c বের করে নিয়ে পাই]

$= 4a^2b^2c^2$ [65-নং প্রয়োগ করে]

67. **(d)** প্রদত্ত নির্ণায়ক $= i^{3n+9}\begin{vmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & i & 1 \\ 1 & i & -1 \end{vmatrix}$ [i^n, i^{n+3} i^{n+6}-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারি থেকে বের করে নিয়ে পাই]

$$= i^{3n+9}\begin{vmatrix} 0 & i & -1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & i & -1 \end{vmatrix} \quad [C_1' = C_1 + C_3]$$

$$= 0.$$

68. (a) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ (2^x - 2^{-x})^2 & (3^x - 3^{-x})^2 & (5^x - 5^{-x})^2 \end{vmatrix}$ $[R_2' = R_2 - R_3]$

$= 4.0 = 0$ [দ্বিতীয় সারি থেকে 4 বের করে নিলে, উৎপন্ন নির্ণায়কের প্রথম দুটি সারি অবিকল একই হবে।]

69. (d) 68 নং-এর অনুরূপ।

70. (c) প্রদত্ত নির্ণায়কটি একটি বিজোড় ক্রমের (3) বিপ্রতিসম নির্ণায়ক; এর মান শূন্য।

71. (d) লক্ষ কর যে $x = 0$-এর জন্য প্রদত্ত নির্ণায়কটি একটি 3 ক্রমের (বিজোড়) বিপ্রতিসম নির্ণায়ক হচ্ছে, সুতরাং এর মান শূন্য হবে। অতএব, সমীকরণটির একটি বীজ হবে $x = 0$.

72. (c) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & a & a+b \end{vmatrix}$ $[R_3' = R_3 - 2R_2$ এবং $R_2' = R_2 - 3R_1]$

$$= a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ a & a+b \end{vmatrix} = a(a^2 + ab - 2a^2 - ab) = -a^3.$$

73. (a) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= x^3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix} + x^2y\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

$= x^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 3 \\ -13 & -8 & 6 \end{vmatrix} + x^2y.0$ [যেহেতু C_1 এবং C_3 অবিকল একই (দ্বিতীয় ক্ষেত্রে)]

$[C_1' = C_1 - 3C_3$ এবং $C_2' = C_2 - 2C_3]$

$= x^3.(40 - 39) = x^3.$

74. (a) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= x^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 3 \end{vmatrix} + x^2y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 8 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$= x^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \\ 10 & -2 & -5 \end{vmatrix} + x^2.y.0$ $[C_3' = C_3 - C_2,\ C_2' = C_2 - C_1$ এবং দ্বিতীয় নির্ণায়কে C_1, C_2 অবিকল একই]

$= x^3(5 - 4) = x^3.$

75. (c) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ হলে, adj $A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

সুতরাং $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$

76. (a) স্পষ্টতই $A(\operatorname{adj} A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A.\ I_3.$

77. (a) $\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^2 = 4.$ সুতরাং $\det(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) = 4^2 = 2^4.$

78. (b) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & y & z \\ -(xp^2+2yp+z) & xp+y & yp+z \end{vmatrix} = 0$

$[C_1' = C_1 - (pC_2 + C_3)]$

$\Rightarrow -(xp^2 + 2yp + z)(xz - y^2) = 0$

$\Rightarrow y^2 = xz$ [যেহেতু p যেকোনো সংখ্যা, $xp^2 + 2yp + z \neq 0$]

$\Rightarrow x, y, z$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে।

79. (b) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ 0 & 0 & b-ax^2-2bxy-cy^2 \end{vmatrix}$

$= (b - ax^2 - 2bxy - cy^2)(ac - b^2) = 0$

[$\because a, b, c$ গুণোত্তর প্রগতিতে আছে, তাই $ac - b^2 = 0$]

80. (a) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & 1+i+\omega^2 \\ -i & -1 & -1-i+\omega \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $[R_3' = R_3 - (R_1 + R_2)]$

81. (d) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$ $[R_1' = R_1 + R_2 + R_3]$

$= (\alpha + \beta + \gamma) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ [যেহেতু $\alpha + \beta + \gamma = 0$]

82. (a) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2x+4 & 2x+6 & 2x+a+c \\ 2x+4 & 2x+6 & 2x+2b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$ $[R_2' = 2R_2$ এবং $R_1' = R_1 + R_3]$

$= 0$ [যেহেতু $a + c = 2b$, তাই R_1 এবং R_2 অবিকল একই।]

83. (c) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= 2!.3! \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 12 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix}$ [R_2 এবং R_3 থেকে যথাক্রমে 2! এবং 2! বের করে নিয়ে]

$$= 12\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} \quad [R_2' = R_2 - R_1,\ R_3' = R_3 - R_2]$$

$$= 24 = 4!.$$

84. (c) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} {}^8C_3 & {}^9C_5 & {}^{10}C_7 \\ {}^9C_4 & {}^{10}C_6 & {}^{11}C_8 \\ {}^9C_{n+1} & {}^{10}C_{3n-3} & {}^{11}C_{2n+2} \end{vmatrix} \quad [R_2' = R_2 + R_1]$

এখন $n + 1 = 4$ হলে $3n - 3 = 6$ এবং $2n + 2 = 8$ হবে এবং R_2 ও R_3 অবিকল একই হয়ে যাবে অর্থাৎ নির্ণায়কের মান শূন্য হয়ে যাবে।

সুতরাং n-এর নির্ণেয় মান 3.

85. (b) প্রদত্ত নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & (n+1)-n & (n+2)-(n+1) \\ \frac{n(n-1)}{2} & {}^{n+1}C_2 - {}^nC_2 & {}^{n+2}C_2 - {}^{n+1}C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ n & n+1 \end{vmatrix} = 1.$

86. (a) $\sum\limits_{n=0}^{p} f(n) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{n=0}^{p} 2^n & \sum\limits_{n=0}^{p}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) & \sum\limits_{n=0}^{p} n \\ x & y & z \\ 2^{p+1}-1 & \frac{p+1}{p+2} & \frac{p(p+1)}{2} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2^{p+1}-1 & \left(1 - \frac{1}{p+2}\right) & \frac{p(p+1)}{2} \\ x & y & z \\ 2^{p+1}-1 & \frac{p+1}{p+2} & \frac{p(p+1)}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{[যেহেতু } R_1 \text{ এবং } R_3 \text{ অবিকল একই।]}$$

87. (a) $\sum\limits_{n=1}^{p} f(n) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{n=1}^{p} 1 & p & p \\ 2\sum\limits_{n=1}^{p} n & p^2+p+1 & p^2+1 \\ \sum\limits_{n=1}^{p}(2n-1) & p^2 & p^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} p & p & p \\ p(p+1) & p^2+p+1 & p^2+1 \\ p^2 & p^2 & p^2 \end{vmatrix} = 0$$

[প্রথম ও তৃতীয় সারি থেকে যথাক্রমে p এবং p^2 বের করে নিলে নতুন নির্ণায়কের R_1 ও R_3 অবিকল একই হয়ে যাচ্ছে।]

88. (c) প্রদত্ত নির্ণায়ক

$$= \begin{vmatrix} a^2 - 2a\cos x + 1 & a & 1 \\ 0 & \cos(n+1)x & \cos(n+2)x \\ 0 & \sin(n+1)x & \sin(n+2)x \end{vmatrix} \quad [C_1' = C_1 + C_3 - 2\cos x\, C_2]$$

$$= (a^2 - 2a\cos x + 1)\begin{vmatrix} \cos(n+1)x & \cos(n+2)x \\ \sin(n+1)x & \sin(n+2)x \end{vmatrix}$$

$= (a^2 - 2a \cos x + 1) \sin x$ — যা n-নিরপেক্ষ।

89. (a) $$\sum_{n=0}^{n} f(n) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{n=0}^{m}(2n-1) & \sum\limits_{n=0}^{m} {}^mC_n & \sum\limits_{n=0}^{m} 1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2 m & \sin m^2 & \sin^2(m+1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m^2-1 & 2^m & m+1 \\ m^2-1 & 2^m & m+1 \\ \sin^2 m & \sin m^2 & \sin^2(m+1) \end{vmatrix} = 0.$$

90. (b) প্রদত্ত পছন্দ অনুযায়ী $f(x)$ হল x-নিরপেক্ষ।

এখন $f(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, অতএব $f(x) = 1$, যা x-এর প্রতিটি মানেই সত্য হবে।

91. (a) $$f(x) = \begin{vmatrix} x & \alpha & 1 \\ \alpha - x & x - \alpha & 0 \\ \beta - x & \gamma - \alpha & 0 \end{vmatrix} \quad [R_2' = R_2 - R_1 \text{ এবং } R_3' = R_3 - R_1].$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha - x & x - \alpha \\ \beta - x & \gamma - \alpha \end{vmatrix} = (x - \alpha)\{\alpha - \gamma - \beta + x\}.$$

সুতরাং $x = \alpha$ হবে $f(x) = 0$-এর একটি বীজ।

92. (b) এখানে $\det A = -3$, সুতরাং $\det(\text{adj } A) = (-3)^2 = 9$.

অতএব $\det(\text{adj}(\text{adj } A)) = 9^2 = 81$.

93. (b) প্রদত্ত নির্ণায়ক $$= \begin{vmatrix} \tan\pi & \tan C & \cos C \\ \tan(\pi - C) & 0 & \sin B \\ \cos(\pi - C) & -\sin B & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \tan C & \cos C \\ -\tan C & 0 & \sin B \\ -\cos C & -\sin B & 0 \end{vmatrix}$$ [যা 3 ক্রমের একটি বিপ্রতিসম নির্ণায়ক] = 0.

94. **(b)** প্রদত্ত সহসমীকরণের অনন্য সমাধান থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4k & -1 \\ 1 & -8 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$

হয়, অর্থাৎ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4k & -1 \\ -5 & -8 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ হয়; অর্থাৎ $(-1)(-20k) \neq 0$ বা, $k \neq 0$ হয়।

95. **(b)** এখানে $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3a & 4b \end{pmatrix}$

এবং $BA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3b & 4b \end{pmatrix}$.

সুতরাং $AB = BA$ $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3a & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a \\ 3b & 4b \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2b = 2a$ এবং $3a = 3b \Leftrightarrow a = b,\ a,\ b \in \mathbb{N}$.

সেট্, সম্বন্ধ ও অপেক্ষক
(Sets, Relations and Mappings)

কার্যকরী সংজ্ঞা ঃ পৃথক বস্তুসমূহের সুসংজ্ঞাত সমাহারকে সেট্ বলা হয়।

চিহ্নের ব্যবহার ঃ প্রচলিত রীতি অনুসারে আমরা সেট্ বোঝাতে ইংরেজী বড় হাতের অক্ষর A, B, C, D ... ইত্যাদি ব্যবহার করব এবং সেটের উপাদান বা সদস্য বোঝাতে গেলে ছোট হাতের ইংরেজী অক্ষর অর্থাৎ $a, b, c, \ldots$ ইত্যাদি ব্যবহার করব। a যদি কোনো সেট্ A-এর উপাদান হয় তবে আমরা লিখব $a \in A$ (পড়, a belongs to A).

সংজ্ঞা ঃ দুটি সেট্ A এবং B-কে আমরা **সমান** বলব যদি তারা অবিকল একই উপাদান দিয়ে গঠিত হয় এবং সেক্ষেত্রে আমরা লিখব A = B.

সংজ্ঞা ঃ যদি কোনো সেট্-এর সদস্য সংখ্যা (বা উপাদান-এর সংখ্যা) n হয় (কোনো অ-ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য), তাহলে সেট্টিকে **সসীম সেট্** (finite set) বলে, অন্যথায় সেট্টিকে **অসীম সেট** (infinite set) বলে।

সেট্-এর বর্ণনা পদ্ধতি ঃ

একটি সেট্কে বর্ণনা করার দু-রকম প্রচলিত পদ্ধতি আছে।

(i) তালিকা পদ্ধতি (roster method বা tabular method)

(ii) সেট্-নির্মাণ পদ্ধতি (set-builder method)

তালিকা পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে একটি সেট্কে তালিকাবদ্ধভাবে প্রকাশ করা হয়; অর্থাৎ সেট্-এর সমস্ত উপাদানগুলিকে দুটি দ্বিতীয় বন্ধনী (curly brace/second bracket)-এর মধ্যে এক এক করে লিখে ফেলা হয়। উদাহরণ হিসেবে, প্রথম পাঁচটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্কে এই পদ্ধতি অনুসারে লেখা হবে $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; আবার ইংরেজী স্বরবর্ণের সেট্কে লেখা হবে, $\{a, e, i, o, u\}$.

এবার খেয়াল করে দেখ এই পদ্ধতিতে যদি সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্কে বর্ণনা করতে হয় তাহলে লিখতে হবে $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, কারণ স্পষ্টতই এটি একটি অসীম সেট্ এবং সেই কারণেই সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যাকে সরাসরি তালিকাবদ্ধ করা সম্ভব নয়। এই সব ক্ষেত্রে সেট্ বর্ণনা করার দ্বিতীয় পদ্ধতি আমাদের কাজে লাগবে।

সেট্ নির্মাণ পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিতে একটি সেট্কে বর্ণনা করতে আমরা সেট্টির সুসংজ্ঞাত নির্মাণ-বাক্যকে ব্যবহার করি, যেটি আসলে ঐ সেট্-এর উপাদানগুলির সাধারণ চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যকে

ভাষায় প্রকাশ করে। অর্থাৎ, কোনো একটি সেট্ X-এর উপাদান x-গুলির যদি কোনো সাধারণ চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য $p(x)$ হয়, তবে আমরা X সেট্‌টিকে লিখব, $X = \{x \mid p(x)\}$. এর মানে হল, X সেট্‌টি সেই সব উপাদান[1] x (ধর) দ্বারা তৈরি যারা প্রত্যেকে (এবং কেবলমাত্র তারাই) $p(x)$ বাক্য বা শর্তটি মেনে চলে। নীচের উদাহরণ তোমাদেরকে এই ধারণাটি বুঝতে সাহায্য করবে।

প্রথম পাঁচটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্, অর্থাৎ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$-কে এই পদ্ধতিতে লিখলে হবে, $\{x \mid 1 \le x \le 5$ এবং x পূর্ণসংখ্যা$\}$ (পড়, সেইসব x যাদের জন্য $1 \le x \le 5$ এবং x একটি পূর্ণসংখ্যা)। আবার সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্‌কে বর্ণনা করতে আমরা এখন বলতে পারি যে, $\{x \mid x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$। এমনকি, যদি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্‌কে $\mathbb{N}$ চিহ্ন দিয়ে নির্দিষ্ট করা হয় বলে ধরে নেওয়া হয়, তবে উপরের সেট্‌টিকে আমরা $\{x \mid x \in \mathbb{N}\}$ হিসেবেও লিখতে পারি।

আরও এগিয়ে যাবার আগে, এসো আমরা প্রচলিত রীতি অনুযায়ী বিভিন্ন বহু-ব্যবহৃত সেট্-এর চিহ্নগুলির তালিকা তৈরি করে ফেলি।

$\mathbb{N}$ ঃ সমস্ত স্বাভাবিক সংখ্যাদের সেট্ (অর্থাৎ সব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাদের নিয়ে গঠিত সেট্)
$\mathbb{Z}$ ঃ সব পূর্ণসংখ্যার সেট্ (জার্মান শব্দ 'Zahlen' অর্থাৎ 'সংখ্যা' থেকে এই চিহ্নটি এসেছে)
$\mathbb{Z}^-$ ঃ সব ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট্
$\mathbb{E}$ ঃ সব জোড় সংখ্যাগুলির সেট্
$\mathbb{Q}$ ঃ সব মূলদ সংখ্যাগুলির সেট্
$\mathbb{Q}^*$ ঃ শূন্য ছাড়া সব মূলদ সংখ্যাগুলির সেট্
$\mathbb{Q}^+$ ঃ সব ধনাত্মক মূলদ সংখ্যাগুলির সেট্
$\mathbb{R}$ ঃ সব বাস্তব সংখ্যাগুলির সেট্
$\mathbb{R}^*$ ঃ শূন্য ছাড়া সব বাস্তব সংখ্যাগুলির সেট্
$\mathbb{R}^+$ ঃ সব ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাগুলির সেট্

সসীম সেট্ X-এর ক্ষেত্রে আমরা $|X|$ চিহ্ন [পড়, X-এর **মাত্রা** (order of X)] ব্যবহার করে (অথবা $n(X)$ চিহ্ন ব্যবহার করে) X সেট্‌টির উপাদানের সংখ্যাকে বোঝাই।

> **সংজ্ঞা ঃ** একটি সেট্ X-কে কোনো একটি সেট্ Y-এর **উপসেট্** (subset) বলে, যদি X-এর প্রতিটি উপাদানই Y-এরও উপাদান হয়। আমরা লিখি যে, $X \subseteq Y$। (পড়, X, Y-এর উপসেট্)

এক্ষেত্রে অনেক সময় আমরা বলি যে X সেট্‌টি Y-এর মধ্যে ঢুকে আছে (contained in Y) অথবা, অন্যকথায়, Y সেট্‌টি X সেট্‌কে ধারণ করে রয়েছে। যদি X সেট্‌টি Y সেটের উপসেট হয় তবে আমরা বলতে পারি যে Y সেট্‌টি X সেটের একটি **পরিসেট্** (superset); চিহ্নের সাহায্যে বললে, $Y \supseteq X$.

1. একথা পরিষ্কার করে বুঝতে হবে যে সেট্-এর উপাদানকে বোঝাতে x অক্ষরটির ব্যবহার নিতান্তই চিহ্ন হিসাবে করা হচ্ছে। এখানে x বলতে **'সেই সব উপাদান'** যারা একটি বিশেষ নির্মাণ-বাক্য মেনে চলে—এইভাবে বুঝতে হবে। অর্থাৎ x-অর্থে ইংরেজী বর্ণমালার অক্ষর x-কেই আমরা সেটের উপাদান হিসাবে বলছি, এমনটা নাও হতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ একটি সেট্ X-কে আমরা আর একটি সেট্ Y-এর **প্রকৃত উপসেট্** (proper subset) বলব যদি —
(i) X সেট্‌টি Y-এর উপসেট্ হয়, এবং
(ii) Y সেট্-এ অন্তত একটি (at least one) উপাদান থাকে যা X সেট্-এ নেই। এক্ষেত্রে আমরা লিখব $X \subset Y$।
আমরা অনেক সময় এই Y-সেট্‌টিকে X-এর **প্রকৃত পরিসেট্** বলি এবং চিহ্নের সাহায্যে লেখা হয় $Y \supset X$.

খেয়াল করে দেখ, উপরে দেওয়া উপসেটের সংজ্ঞা অনুসারে একথা বলা চলে যে, **প্রতিটি সেট্ই তার নিজের উপসেট্** (প্রকৃত উপসেট্ নয় কিন্তু!)। বস্তুত, যেকোনো সেট্ X-এর জন্যে একথা সত্যি যে X-এর প্রত্যেকটি উপাদানই X-এর উপাদান! এবং সেই কারণেই $X \subseteq X$। এই পরিপ্রেক্ষিতে কখনও কখনও একটি সেট্‌কে তার নিজের **অপ্রকৃত উপসেট্** (improper subset) বলে।

এখানে আমরা আরও দুটি চিহ্নের ব্যবহার আলোচনা করব। দুটি সেট্ A এবং B-এর ক্ষেত্রে $A \nsubseteq B$ বলতে আমরা বুঝবো যে A সেট্‌টি B-এর উপসেট নয়; আবার $A \not\subset B$ বলতে বুঝবো যে A সেট্‌টি B-এর প্রকৃত উপসেট্ নয়।

সংজ্ঞা ঃ একটি সেট্-এ যদি কোনো উপাদানই না থাকে তবে সেট্‌টিকে **শূন্যসেট্** (null set, ফাঁকা বা খালি অর্থে, সংখ্যা অর্থে নয়) বলে।

সংজ্ঞা : সেট্ সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যায় কখনও কখনও এমন একটি সেট্-এর প্রয়োজন পড়ে যে, ঐ সমস্যায় ব্যবহৃত সব সেট্‌গুলি যেন এই সেট্‌টির উপসেট্ হয়। এই নতুন সেট্‌টিকে ঐ গাণিতিক সমস্যার পরিপ্রেক্ষিতে একটি **সার্বিক সেট্** (universal set) বলে এবং সাধারণতঃ একে S চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করা হয়।

সংজ্ঞা : কোনো একটি সেট্ A-এর **উপসেট্ গোষ্ঠী** (power set) বলতে সেই সেট্‌টির সমস্ত উপসেট্ নিয়ে তৈরী করা সেট্‌কে বোঝায়। অর্থাৎ A যদি একটি সেট্ হয়, তবে $\mathcal{P}(A)$, অর্থাৎ A-এর উপসেট্ গোষ্ঠী বলতে আমরা বুঝব,

$$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \text{ সেট্‌টি A-সেটের উপসেট্} \}।$$

সেট্ প্রক্রিয়া (SET OPERATIONS)

সংজ্ঞা : দুটি সেট্ X এবং Y-এর **সংযোগ** (union), (যা $X \cup Y$ চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়), বলতে আমরা বুঝব, একটি সেট্-এর কথা যেখানে, $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ অথবা } x \in Y\}$ হয়।

অর্থাৎ, X এবং Y সেট্ দুটির সব উপাদানকে নিয়ে $X \cup Y$ সেট্‌টি তৈরী হবে (অবশ্যই, যদি কোনো উপাদান X এবং Y দুটি সেট্-এই থাকে তাহলে তাদেরকে একবারই নিতে হবে)।

সংজ্ঞা : দুটি সেট্ X এবং Y এর **ছেদ** (intersection), (যা $X \cap Y$ চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়), বলতে আমরা বুঝব একটি সেট্-এর কথা, যেখানে

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ এবং } x \in Y\} \text{ হয়।}$$

অর্থাৎ, X এবং Y সেট্‌দুটির সাধারণ উপাদানগুলিকে নিয়ে $X \cap Y$ সেট্‌টি তৈরি হয়। যদি X এবং Y সেট্‌-এর কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে, অর্থাৎ $X \cap Y = \phi$ হয়, তখন এদেরকে **শূন্যচ্ছেদী** (disjoint) **সেট্‌** বলে।

সেট্‌-এর সংযোগ এবং ছেদ সংক্রান্ত মৌলিক ধর্মাবলীর তালিকা

ধরা যাক, কোনো একটি সার্বিক সেট্‌ S-এর সাপেক্ষে X, Y এবং Z যে কোনো তিনটি সেট্‌। এক্ষেত্রে,

(i) $X \cup S = S$ এবং $X \cap S = X$

(ii) $X \cup \phi = X$ এবং $X \cap \phi = \phi$ (**একসম সূত্র**) (identity laws)

(iii) $X \cup X = X$ এবং $X \cap X = X$ (**বর্গৈকসম সূত্র**) (idempotence laws)

(iv) $X \cup Y = Y \cup X$ এবং $X \cap Y = Y \cap X$
(**বিনিময়যোগ্য সূত্র**) (Commutative laws)

(v) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
(**সংযোজ্য সূত্র বা দলবদলের সূত্র**) (Associative laws)

(vi) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (**বন্টন সূত্র**) (Distributive laws)

(vii) $X \cap (X \cup Y) = X$, $X \cup (X \cap Y) = X$(**বিশোষণ সূত্র**) (Absorptive laws)

সংজ্ঞা ঃ A এবং B যে কোনো দুটি সেট্‌ হলে তাদের **অন্তর** (difference) বলতে এমন একটি সেট্‌ $A \setminus B$ কে বোঝায় যে,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ কিন্তু } x \notin B\}$$

অর্থাৎ $A \setminus B$ সেট্‌টি A-এর সেইসব উপাদান দিয়ে গঠিত যা B-এর উপাদান নয়। কখনও $A \setminus B$ সেট্‌টিকে পরিভাষায় **'A-এর সাপেক্ষে B-এর পূরক সেট্‌'** বলেও উল্লেখ করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ কোনো সার্বিক সেট্‌ S-এর সাপেক্ষে একটি সেট্‌ A-এর **পূরক সেট্‌** (complement of a set A) বলতে আমরা এমন একটি সেট্‌ A'-কে বুঝি যে,

$$A' = S \setminus A = \{x \mid x \in S \text{ কিন্তু } x \notin A\} \text{ হয়।}$$

উপপাদ্য ঃ

ধরা যাক A, B যেকোনো দুটি সেট্‌ এবং S এই সমস্যার একটি সার্বিক সেট। সেক্ষেত্রে,

(i) $A \cup A' = S$ এবং $A \cap A' = \phi$

(ii) $(A')' = A$ (iii) $A \setminus B = A \cap B'$

(iv) **(De Morgan-এর সূত্র) ঃ** $(A \cup B)' = A' \cap B'$ এবং $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

সংজ্ঞা ঃ দুটি সেট্ A এবং B-এর **প্রতিসম অন্তর** (symmetric difference), (যা $A \Delta B$ হিসেবে চিহ্নিত হবে) বলতে আমরা এমন একটি সেট্ কে বুঝবো যে,

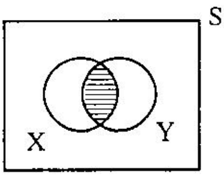
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ হয়।}$$

সংজ্ঞা ঃ যেকোনো দুটি অশূন্য সেট্ A এবং B-এর **কার্তেসীয় গুণফল** (Cartesian product) বলতে আমরা এমন একটি সেট্ $A \times B$-কে বুঝব যে, $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. অন্যভাবে বললে, $A \times B$ সেট্‌টি হ'ল A এবং B-এর উপাদানগুলির ক্রমিক জোড় (ordered pair) দিয়ে তৈরি একটি সেট্, যেখানে ক্রমিক জোড় বলতে বোঝানো হচ্ছে এমন জোড়গুলির কথা যাদের প্রথমটি, প্রথম সেট্ A-এর উপাদান এবং দ্বিতীয়টি, দ্বিতীয় সেট্ B-এর উপাদান। আরও বলে রাখা যাক, যেকোনো সেট্ A-এর জন্য আমরা সংজ্ঞা হিসেবেই ধরে নেব যে $A \times \phi = \phi = \phi \times A$ হবে।

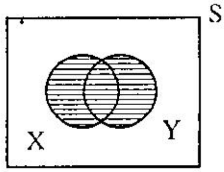
ভেনচিত্র (VENN DIAGRAMS)

ইংরেজ যুক্তিবিদ John Venn (1834-1923) সেট্ প্রক্রিয়াকে এক ধরনের ছবির মাধ্যমে তুলে ধরার কথা বলেন 1880 সাল নাগাদ। সেট্-তত্ত্বে এই ধরনের চিত্রগুলিকে ভেনচিত্র বলে। এ বিষয়ে আরও এগিয়ে যাবার আগেই একটি কথা পরিষ্কার করে বুঝে নাও। সেট্-এর ধারণা সম্পূর্ণভাবে তত্ত্বগত এবং তাই সেট্ কেমন দেখতে এই প্রশ্ন পুরোপুরি অর্থহীন, অর্থাৎ সেট্-এর কোনো 'চেহারা' হয় না। তবে ভেনচিত্র এক ধরনের চিত্রকল্প, যা সেট্-এর বিমূর্ত ধারণাকে, বিশেষ করে সেট্ প্রক্রিয়াগুলিকে, একটা মোটামুটিভাবে ধরা ছোঁয়ার মধ্যে এনে ফেলা জ্যামিতিক চিত্ররূপ দেয়। যদিও এই পদ্ধতিতে প্রচুর গাণিতিক যুক্তিগত ফাঁক ফোঁকোর থেকে যায়, যা একদিক থেকে দেখলে সেট্-এর মূল চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যের সঙ্গে একেবারেই বেমানান; তবে সন্দেহ নেই যে ভেনচিত্রগুলির একটা নিজস্ব জ্যামিতিক আবেদন আছে, যা সেট্-তত্ত্ব শেখার একেবারে গোড়ার ধাপে এই তত্ত্বের বিমূর্ততাকে মনের চোখ দিয়ে দেখতে শেখার কাজে পরোক্ষভাবে সাহায্য করে।

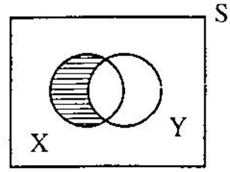
এবারে, ভেনচিত্র আঁকার নিয়মনীতি আলোচনা করা যাক। ভেনচিত্রে সার্বিক সেট্‌কে সাধারণভাবে একটি আয়তক্ষেত্র দিয়ে বোঝানো হয় এবং এর উপসেট্‌গুলিকে আয়তক্ষেত্রটির ভিতরে বৃত্তাকারে আঁকা হয়। প্রচলিত রীতি অনুসারে প্রতিটি চিত্রেই ভরাট করা অংশটির মাধ্যমে ঐ চিত্রের নীচে লেখা সেট্‌টিকে বোঝানো হয়। নীচের ভেনচিত্রগুলি দুটি সেট্-এর ছেদ, সংযোগ, অন্তর, প্রতিসম অন্তর এবং কোনো সেট্-এর পূরক সেট্‌কে চিত্রায়িত করছে।



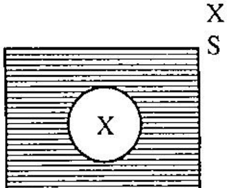
$X \cap Y$



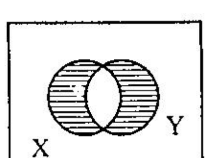
$X \cup Y$



$X \setminus Y$



X'



$X \Delta Y$

গ্রহণ-বর্জন নীতির মূল পাঁচটি সূত্র

I. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

II. $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$

III. $|A'| = |S \setminus A| = |S| - |S \cap A| = |S| - |A|$

[S সেট্‌টিকে সার্বিক সেট্ ধরে নিয়ে]

IV. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

V. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B|$
$- |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

সম্বন্ধ এবং চিত্রন (বা অপেক্ষক) ঃ

সংজ্ঞা ঃ দুটি সেট্ A এবং B-এর কার্তেসীয় গুণফল $A \times B$-এর যেকোনো উপসেট্ (subset) $\mathfrak{R}$-কে A থেকে B-তে একটি **দ্বিনিধানী** বা **দ্বৈত সম্বন্ধ** (binary relation) বলা হয়; অর্থাৎ, $\mathfrak{R} \subseteq A \times B$. একথা বোঝা জরুরি যে কখনও কখনও $\mathfrak{R} \subseteq A \times A$ হতেই পারে এবং সেক্ষেত্রে আমরা $\mathfrak{R}$-কে A সেট্ থেকে A-তেই একটি সম্বন্ধ বলে ভাবব। এই ক্ষেত্রে পরিভাষায় $\mathfrak{R}$-কে **A সেটের ওপর একটি সম্বন্ধ** (a relation on A) বলে অভিহিত করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক, A একটি যেকোনো অশূন্য সেট্ । $A \times A$ সম্বন্ধকে A-এর ওপর **সার্বিক সম্বন্ধ** (universal relation) এবং শূন্যসেট ϕ-কে A-এর ওপর **শূন্য সম্বন্ধ** (empty relation) বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধরি, X একটি অশূন্য সেট্ (non-null set). X সেট্-এর ওপর **উপাদানস্থির সম্বন্ধ** (identity relation) বা **কর্ণ সম্বন্ধ** (diagonal relation) I_X-কে আমরা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করব ঃ

$$I_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

অর্থাৎ, $(x, y) \in I_X \Leftrightarrow x = y$, যেখানে $x, y \in X$; অর্থাৎ, কর্ণ সম্বন্ধের সাপেক্ষে যেকোনো সেট্-এ প্রতিটি উপাদান কেবলমাত্র নিজের সঙ্গেই সম্পর্কিত হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক, A সেট্ থেকে B সেট্-এ $\mathfrak{R}$ একটি সম্বন্ধ। এখানে $\mathfrak{R}$-এর **ক্ষেত্র** (domain) বলতে একটি সেট $\mathcal{D}(\mathfrak{R})$ কে বোঝানো হয় যেখানে, $\mathcal{D}(\mathfrak{R}) = \{a \mid a \in A$ এবং অন্ততপক্ষে একটি $b \in B$ আছে যার জন্য $(a, b) \in \mathfrak{R}\}$; আবার $\mathfrak{R}$-এর **প্রসার** (range) বা **প্রতিবিম্ব** (image) বলতে একটি সেট $I(\mathfrak{R})$-কে বোঝানো হয় যেখানে, $I(\mathfrak{R}) = \{b \mid b \in B$ এবং অন্ততপক্ষে একটি $a \in A$ আছে যার জন্য $(a, b) \in \mathfrak{R}\}$.

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক, A সেট্ থেকে B সেট্-এ $\mathfrak{R}$ একটি সম্বন্ধ। এক্ষেত্রে, $\mathfrak{R}$-এর **বিপরীত সম্বন্ধ** (inverse relation) (যা $\mathfrak{R}^{-1}$ চিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়) বলতে B সেট্ থেকে A সেট্-তে এমন একটি সম্বন্ধকে নির্দেশ করা হয় যার উপাদানগুলি শুধুমাত্র সেই সব ক্রমিক জোড়, যাদের ক্রম বিপরীত করলে সেগুলি $\mathfrak{R}$ সম্বন্ধের উপাদান হবে; অর্থাৎ, $\mathfrak{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathfrak{R}\}$.

সংজ্ঞা (নানান ধরণের সম্বন্ধ) ঃ

ধরা যাক, ρ হল অশূন্য সেট্ A-এর ওপর কোনো সম্বন্ধ। এক্ষেত্রে ρ-কে বলা হয়

(a) **স্বসম (*reflexive*) সম্বন্ধ** যদি প্রতিটি $a \in$ A-এর জন্যে $(a, a) \in \rho$ হয়, অর্থাৎ, যদি প্রত্যেক $a \in$ A-এর জন্যে $a\rho a$ হয়। লক্ষ কর, এক্ষেত্রে A সেটের প্রতিটি উপাদানই নিজের সঙ্গে ρ সম্বন্ধে সম্পর্কিত।

(b) **প্রতিসম সম্বন্ধ (*symmetric relation*)**, যদি A সেটের যেকোনো উপাদান a, b-এর জন্যে, $a\rho b$ হলেই $b\rho a$ হয়; অর্থাৎ, যদি $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$ হয়, যেখানে $a, b \in$ A.

(c) **সংক্রমণশীল সম্বন্ধ (*transitive relation*)**, যদি A সেটের যেকোনো উপাদান a, b, c-এর জন্যে, $a\rho b$ এবং $b\rho c$ হলেই $a\rho c$ হয়; অর্থাৎ, যদি $(a, b) \in \rho$ এবং $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$, হয়, যেখানে $a, b, c \in$ A.

সংজ্ঞা (সমতুল্যতা সম্বন্ধ [Equivalance Relation]) ঃ

একটি অশূন্য সেট্ A-এর ওপর কোনো সম্বন্ধ ρ কে বলা হয় **সমতুল্যতা সম্বন্ধ** যদি ρ একই সঙ্গে স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল সম্বন্ধ হয়।

উদাহরণ ঃ [redacted]

ধরি $\mathbb{Z}$ সেটের ওপর ρ এমন একটি সম্বন্ধ যার সংজ্ঞা হল, $x\rho y \Leftrightarrow (x - y)$ সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য। এক্ষেত্রে ρ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

বস্তুত, যেকোনো $x \in \mathbb{Z}$-এর জন্যে $x - x = 0$, যা অবশ্যই 5 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব, যেকোনো $x \in \mathbb{Z}$-এর জন্যেই $x\rho x$ হচ্ছে; সুতরাং ρ সম্বন্ধটি সম্বন্ধটি স্বসম।

ধরা যাক, $x, y \in \mathbb{Z}$ এমন দুটি সংখ্যা যে $x\rho y$ হয়; অর্থাৎ $(x - y)$ সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হয়। তাহলে $y - x = -(x - y)$ সংখ্যাটি অবশ্যই 5 দ্বারা বিভাজ্য হবে। সুতরাং $y\rho x$ হবে। অতএব, ρ সম্বন্ধটি প্রতিসম।

আবার, মনে কর $x, y, z \in \mathbb{Z}$ এমন তিনটি সংখ্যা যে $x\rho y$ এবং $y\rho x$ হচ্ছে। অর্থাৎ $(x - y)$ এবং $(y - z)$ উভয়েই 5 দ্বারা বিভাজ্য হচ্ছে। তাহলে $x - z = (x - y) + (y - z)$ সংখ্যাটিও অবশ্যই 5 দ্বারা বিভাজ্য হয়ে পড়বে। সুতরাং $x\rho z$ হচ্ছে। অতএব ρ সম্বন্ধটি সংক্রমণশীল। সব মিলিয়ে আমরা বলতে পারি যে ρ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

লক্ষ্য করার বিষয় হল যে উপরে আলোচনা করা তিন ধরণের সম্বন্ধগুলির (যথা, স্বসম, প্রতিসম ও সংক্রমণশীল) কোনো একটি বা দুটি মিলে অন্য কোনো একটিকে প্রতিপন্ন করে না। অর্থাৎ ঐ সম্বন্ধগুলি পরস্পর স্বাধীন (independent of each other) এই বিষয়ে আলোকপাত করতে নীচের তালিকায় আমরা কিছু বিশেষ সম্বন্ধের উদাহরণ তথা প্রতি-উদাহরণ (counterexample) তুলে ধরলাম।

	সম্বন্ধ ρ-এর সংজ্ঞা	স্বসম	প্রতিসম	সংক্রমণশীল	সমতুল্যতা
1.	$x\,\rho\,y \Leftrightarrow xy \geq 0,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$ (অর্থাৎ $\mathbb{Z}$-এর ওপরে)	✓	✓	✓	✓
2.	$x\,\rho\,y \Leftrightarrow xy > 0,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$ (অর্থাৎ $\mathbb{Z}$-এর ওপরে)	×	✓	✓	×
3.	$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x$ সংখ্যাটি y দ্বারা বিভাজ্য হয়, যেখানে $x,\ y$ অশূন্য বাস্তব সংখ্যা (অর্থাৎ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$-এর ওপরে)	✓	×	✓	×
4.	$x\,\rho\,y \Leftrightarrow x - y = 0$ বা 3 বা $-3,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$ (অর্থাৎ $\mathbb{Z}$-এর ওপরে)	✓	✓	×	×
5.	$x\rho y \Leftrightarrow x\,\lvert y \rvert \geq 0,\ x,\ y \in \mathbb{R}$ (অর্থাৎ $\mathbb{R}$-এর ওপরে)	×	×	✓	×
6.	$A\rho B \Leftrightarrow A \cap B \neq \phi$, যেখানে A, B হল X সেটের উপসেট ($\lvert X \rvert \geq 2$) (অর্থাৎ $\mathcal{P}(X)$-এর ওপরে)	×	✓	×	×
7.	$x\,\rho\,y \Leftrightarrow 0 \leq x - y < 5,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$ (অর্থাৎ $\mathbb{Z}$-এর ওপরে)	✓	×	×	×
8.	$x\,\rho\,y \Leftrightarrow y = x + 2,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$ (অর্থাৎ $\mathbb{Z}$-এর ওপরে)	×	×	×	×

একটি কার্যকরী কৌশল ঃ

কোনো **সসীম সেট** X-এর ওপর প্রদত্ত সম্বন্ধ ρ-এর ধরণ সম্বন্ধে জানতে এক বিশেষ ধরণের চিত্র আঁকা হয়, যা খুবই কার্যকরী ভাবে এবং সরল উপায়ে ρ সম্বন্ধে যাবতীয় অথ্যকে চোখের ওপর তুলে ধরে। পরিভাষায় এই ধরণের চিত্রকে digraph (বা directed graph) বলা হয়। নীচে খুবই সংক্ষেপে আমরা এই চিত্রের প্রয়োগ দেখালাম।

যদি $x,\ y \in X$ হয় এবং $x\rho y$ হয়, তবে x ও y-কে দুটি বিন্দু দিয়ে বোঝাও এবং x থেকে y-এর দিকে একটি তীরচিহ্ন আঁক, যেমন $x\bullet\!\longrightarrow\!\bullet y$; আবার $x\rho x$ হলে x থেকে শুরু করে তীর চিহ্নিত বক্ররেখাকে x-এই ফিরিয়ে আনো, যথা $\underset{x}{\overset{\circlearrowleft}{\bullet}}$ যা x-এর পাশে একটি ফাঁদ (loop) তৈরী করবে।

নিয়ম ঃ (1) যদি **X**-এর ওপর কোনো সম্বন্ধ ρ-এর digraph চিত্রে প্রতিটি $x \in$ **X**-এর পাশে একটি করে ফাঁদ থাকে তবে ρ স্বসম হবে; এই বিবৃতি বিপরীতক্রমেও সত্যি।

(2) যদি X-এর ওপর কোনো সম্বন্ধ ρ-এর digraph চিত্রে, যেকোনো $x,\ y \in$ X-এর জন্যে, যখনই x থেকে y অভিমুখে তীর চিহ্নিত বক্ররেখা আছে তখনই y থেকে x অভিমুখেও একটি তীরচিহ্নিত বক্ররেখা থাকে (যেমন $x\bullet\!\longrightarrow\!\bullet y$ এবং $x\bullet\!\longleftarrow\!\bullet y$) তাহলে সেই সম্বন্ধ ρ একটি প্রতিসম সম্বন্ধ হবে। এই বিবৃতিও বিপরীতক্রমে সত্যি থাকে।

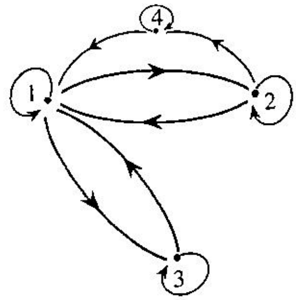
(3) যদি X-এর ওপর কোনো সম্বন্ধ ρ-এর digraph চিত্রে, যেকোনো $x,\ y,\ z \in$ X-এর জন্যে, যখনই x থেকে y অভিমুখে তীরচিহ্নিত বক্ররেখা আছে এবং y থেকে z অভিমুখেও তীর চিহ্নিত বক্ররেখা আছে (যেমন $x\bullet\!\longrightarrow\!\underset{y}{\bullet}\!\longrightarrow\!\bullet z$) তখনই x থেকে z অভিমুখেও একটি তীর চিহ্নিত বক্ররেখা থাকে (যেমন $x\bullet\!\longrightarrow\!\bullet z$, $\overset{y}{\bullet}$) তাহলে সেই সম্বন্ধ ρ একটি সংক্রমণশীল সম্বন্ধ হবে। বিবৃতিটি বিপরীতক্রমেও সত্যি।

এখন নীচের উদাহরণটি মন দিয়ে দেখ।

উদাহরণ ঃ [redacted]

X = {1, 2, 3, 4}; ρ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4), (1, 3), (2, 4), (4, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2)} একটি সম্বন্ধ।

ρ-এর digraph চিত্রটি হবে ঃ



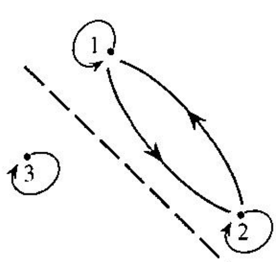
উপরের digraph চিত্র থেকে বলা যায়

(i) ρ **স্বসম সম্বন্ধ** কারণ প্রতিটি $x \in$ X-এর পাশে একটি করে ফাঁদ হয়েছে।

(ii) ρ **প্রতিসম সম্বন্ধ নয়।** কারণ ρ-এর digraph চিত্রে $4 \bullet \longrightarrow \bullet 1$ তীর চিহ্ন রয়েছে কিন্তু 1 থেকে 4 অভিমুখে কোনো তীর চিহ্নিত বক্ররেখা নেই।

(iii) ρ **সংক্রমণশীল নয়,** কারণ চিত্রে $4 \bullet \longrightarrow \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \bullet 3$ 4 থেকে 1 এবং 1 থেকে 3 পর্যন্ত তীরচিহ্নিত বক্ররেখা রয়েছে কিন্তু 4 থেকে 3 সরাসরি কোনো তীরচিহ্নিত বক্ররেখা নেই।

টীকা ঃ জেনে রাখ যে, যদি ρ সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় তবে ρ-এর digraph চিত্র আঁকলে দেখা যাবে যে চিত্রটি কয়েকটি টুকরোতে ভেঙে গেছে (টুকরোর সংখ্যা এক বা একাধিক হতে পারে)। যেমন উদারণ হিসেবে, ধর A = {1, 2, 3}; ρ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}. এবার ρ-এর digraph চিত্র আঁকলে দেখবে তা দুটি ভিন্ন টুকরোয় ভেঙে গেছে। লক্ষ কর স্পষ্টতই একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। পাশের চিত্রে ρ-এর digraph টিকে লক্ষ কর।



চিত্রটি দুটি টুকরোয় ভেঙে গেছে।

দুটি সেট্ A এবং B-এর সাপেক্ষে (A এবং B ভিন্ন সেট্ হতেও পারে, নাও হতে পারে) আমরা $f : A \to B$ চিহ্নের মাধ্যমে একটি **অপেক্ষক** (function) [বা **চিত্রণ** (mapping)]-কে বোঝাবো। এই চিহ্নের অর্থ হল A সেট্-এর প্রতিটি উপাদান a-এর জন্যে B সেট্-এর কোনো একটি (কেবলমাত্র একটিই) উপাদানকে নির্দিষ্ট করা এবং এক্ষেত্রে আমরা লিখব $f(a) = b$; অন্যভাবে বললে, **A সেট্-এর a উপাদানে f অপেক্ষকের মান** (value of f at $a \in$ A) **হল b**; অথবা **b হল f অপেক্ষকের অধীনে a-এর প্রতিবিম্ব** (b is the image of a under f). বিপরীতপক্ষে, a উপাদানকে f-এর

সাপেক্ষে b-এর **প্রাক্-প্রতিবিম্ব** (pre-image) বলা চলে। আরও নিখুঁতভাবে গাণিতিক পরিভাষায় বললে, A থেকে B-তে বা B-এর অভ্যন্তরে একটি অপেক্ষক f বলতে, A থেকে B-তে একটি বিশেষ ধরনের সম্বন্ধ (relation)-কে বোঝায়, যা নীচের সংজ্ঞায় তুলে ধরা হল।

সংজ্ঞা ঃ দুটি অশূন্য (non-null) সেট্ A এবং B-এর জন্যে A থেকে B-তে একটি সম্বন্ধ f কে, **A থেকে B-এর অভ্যন্তরে একটি অপেক্ষক বা চিত্রণ** (a function or mapping from A into B) বলা হবে যদি

(i) f সম্বন্ধটির ক্ষেত্র (domain of f) A হয়, এবং

(ii) f সম্বন্ধটি **সুসংজ্ঞাত** (well-defined) বা **অনন্য মানদায়ী** (single valued) হয়, এই অর্থে যে $(a, b) \in f$ এবং $(a, b') \in f$ হলে, অবশ্যই $b = b'$ হবে; এক্ষেত্রে চিহ্নের মাধ্যমে বলা হয় $f(a) = b$.

সংজ্ঞা ঃ $f : A \to B$ একটি অপেক্ষক হলে A সেট্‌টিকে f **অপেক্ষকের সংজ্ঞার ক্ষেত্র** বা **সংজ্ঞার অঞ্চল** (domain of the function) বলে এবং একে $\mathcal{D}(f)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। অন্যদিকে B সেট্‌টিকে f অপেক্ষকের **সহক্ষেত্র** (codomain) বলে। স্পষ্টতই $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ সেট্‌টি B সেট্-এর একটি উপসেট্। $f(A)$ সেট্‌টিকে অনেক সময় f অপেক্ষকের **পাল্লা** (range) বা **প্রসার** বলা হয় এবং একে $Im(f)$ চিহ্নের সাহায্যে বোঝানো হয়। যখন f অপেক্ষকটি এমন যে, f-এর ক্ষেত্র = f-এর সহক্ষেত্র = A (ধরি), অর্থাৎ $f : A \to A$ হয়, তখন আমরা f-কে **A-এর ওপর একটি অপেক্ষক** (function on A) বলব।

সংজ্ঞা ঃ দুটি অপেক্ষক $f : X \to Y$ এবং $g : X \to Y$ **সমান** হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি, প্রতিটি $x \in X$-এর জন্যে $f(x) = g(x)$ হয়।

সংজ্ঞা ঃ একটি অপেক্ষক (বা চিত্রণ) $f : A \to A$-কে **উপাদানস্থির অপেক্ষক** (identity function) (বা, উপাদানস্থির চিত্রণ [identity mapping]) বলা হবে, যদি প্রতিটি $x \in A$-এর জন্যে $f(x) = x$ হয়। এই অপেক্ষকটিকে সাধারণত ι_A দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

সংজ্ঞা ঃ কোনো অপেক্ষক $f : A \to B$-কে **ধ্রুব অপেক্ষক** (constant function) বলে, যদি $f(A)$ সেট্‌টি B-এর একটি **একমাত্রিক** (singleton) উপসেট্ হয়। অর্থাৎ, ধ্রুব অপেক্ষকের অধীনে অপেক্ষকটির ক্ষেত্র সেট্‌টির সব উপাদানই B সেট্-এর একটিমাত্র স্থির উপাদানের সাথে সম্পর্কিত হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক, $f : A \to B$ একটি অপেক্ষক।

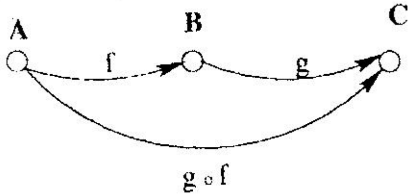
(a) অপেক্ষক f-কে **একৈক** (one-one বা injective) বলা হয়, যদি অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চলের যেকোনো দুটি ভিন্ন উপাদান সর্বদাই অপেক্ষকটির অধীনে ভিন্ন প্রতিবিম্বে চিত্রিত হয় (distinct elements of domain are mapped to distinct images); অর্থাৎ, $a_1, a_2 \in A$ এবং $a_1 \neq a_2$ হলেই $f(a_1) \neq f(a_2)$ হবে।

(b) অপেক্ষক f-কে **পরিব্যাপ্ত** (onto বা surjective) বলা হবে, যদি প্রত্যেক $b \in B$-এর জন্যেই অন্ততপক্ষে একটি উপাদান $a \in A$ থাকে, যার জন্যে $f(a) = b$ হয়। এক্ষেত্রে $I_m(f) = B$; অর্থাৎ, $f(A) = B$; অর্থাৎ, $\{f(a) \mid a \in A\} = B$ হবে।

(c) অপেক্ষক f যদি একই সাথে একৈক এবং পরিব্যাপ্ত হয়, তবে f-কে **একৈক-পরিব্যাপ্ত** (bijective বা one-to-one correspondence) বলা হয়।

'অপেক্ষক' f কে 'চিত্রণ' নামে অভিহিত করলে, সেক্ষেত্রে উপরের তিন গোত্রের অপেক্ষককে যথাক্রমে a) একৈক চিত্রণ b) উপরি চিত্রণ এবং c) উভচিত্রণ বলা চলে।

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ দুটি অপেক্ষক। আমরা এই দুটি অপেক্ষকের **সংযোজন** (composition)-কে $g \circ f$ চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করব এবং $g \circ f$ বলতে A থেকে C-তে এমন একটি সম্বন্ধকে বোঝাবো যে, $g \circ f = \{(a, c) : a \in A, c \in C$ এবং এমন একটি $b \in B$ থাকবে যে $f(a) = b$ ও $f(b) = c\}$ হয় (চিত্র 3 দেখ)। একথা প্রমাণ করা যায় যে এক্ষেত্রে $g \circ f$ সম্বন্ধটি একটি অপেক্ষক হবে, যদি $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$ হয় (লক্ষ্য কর, এই কারণেই f অপেক্ষকের সহক্ষেত্র (codomain) এবং g অপেক্ষকের ক্ষেত্রকে সংজ্ঞায় একই সেট্ নেওয়া হয়েছে) $g \circ f$ অপেক্ষককে f এবং g অপেক্ষকের **সংযোগে উৎপন্ন** (product of the functions f and g) **অপেক্ষক** বলা হয়।



চিত্র 3

ধরা যাক, $(g \circ f)(a) = c$. এখন যেহেতু $c = g(b)$ এবং $b = f(a)$ (কোনো একটি $b \in$ B-এর জন্যে), অতএব এই দুটি তথ্য একত্র করলে আমরা পাই $c = g(b) = g(f(a))$; অর্থাৎ, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. এখানে বলে রাখা যাক, যেকোনো **দুটি অপেক্ষককে সর্বদা ইচ্ছেমতো ক্রমে সংযোজন করা সম্ভব নাও হতে পারে।**

সংজ্ঞা ঃ ধরা যাক, $f : A \to B$ যেকোনো একটি অপেক্ষক। এখন অপেক্ষক f-কে বলা হবে

(i) **বাম বিলোমযোগ্য** বা **বাম বিপরীতকরণযোগ্য** (left invertible), যদি এমন একটি অপেক্ষক $g : B \to A$ থাকে যে $g \circ f = \iota_A$ হয় এবং সেক্ষেত্রে g অপেক্ষককে f-এর **বাম বিলোমকারী** বা **বাম বিপরীত** (left inverse) বলা হয়;

(ii) **দক্ষিণ বিলোমযোগ্য** বা **ডান বিপরীতকরণযোগ্য** (right invertible), যদি এমন একটি অপেক্ষক $h : B \to A$ থাকে যে $f \circ h = \iota_B$ হয় এবং সেক্ষেত্রে h অপেক্ষককে f-এর **দক্ষিণ বিলোমকারী** বা **ডান বিপরীত** (right invertible) বলা হয়;

(iii) **বিলোমযোগ্য** বা **বিপরীতকরণযোগ্য** (invertible), যদি f অপেক্ষকটি বাম এবং ডান, উভয় বিপরীতকরণযোগ্য (বা, বিলোমযোগ্য) হয় এবং সেক্ষেত্রে যে অপেক্ষক $g : B \to A$ এই বাম অথবা দক্ষিণ বিলোমকারীর ভূমিকা নেয় তাকে f অপেক্ষকের **বিপরীত অপেক্ষক** (inverse function of f) বলা হয়।

অনুশীলনী

1. নীচের সেটগুলির কোনটি শূন্য সেট্?

(a) $A = \{x : x$ একটি জটিল সংখ্যা এবং $x^2 - 1 = 0\}$

(b) $B = \{x :$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $\frac{1}{x}$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$

(c) $C = \{x : x$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $x + \frac{1}{x} + 1 = 0\}$

(d) $D = \{x : x$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $x - \frac{2}{x} = 1\}$

2. $p\mathbb{N} = \{px : x$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$ হলে, $4\mathbb{N} \cap 10\mathbb{N} =$

(a) $40\mathbb{N}$ (b) $10\mathbb{N}$ (c) $20\mathbb{N}$ (d) $4\mathbb{N}$.

3. যেকোনো দুটি অশূন্য সেট A এবং B-এর জন্যে, $(A \cup B)' \cup (A' \cap B) =$

(a) A' (b) B' (c) ϕ (d) $A' \cup B'$.

4. যেকোনো দুটি অশূন্য সেট A এবং B-এর জন্যে, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$

(a) $A \setminus (A \cap B)$ (b) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (c) $B \setminus (A \cap B)$ (d) ϕ.

5. A এবং B যেকোনো দুটি সেট্ এবং $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \phi$ হলে,

(a) $A \subseteq B$ (b) $B \subseteq A$ (c) $A = B$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

6. $A = \{(x, y) \in R^2 : x \neq 0$ এবং $y = \frac{1}{x}\}$ এবং $B = \{x, y) \in R^2 : y = -x\}$ হলে, $A \cap B$ হবে

(a) $\{(x, y) : y = -1\}$ (b) ϕ

(c) একটি একমাত্রিক সেট (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

7. $A = \{x : x = 2n + 4; n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x : x = 4n + 3; n \in \mathbb{N}\}$ এবং সার্বিক সেট্ $\mathbb{N}$ হলে, $A' \cup ((A \cup B) \cap B') =$

(a) A (b) (c) ϕ (d) $\mathbb{N}$.

8. $A = \{(x, y) \in R^2 : y = e^x\}$ এবং $B = \{(x, y) \in R^2 : y = x\}$ হলে, $A \cap B$ হবে

(a) ϕ (b) একটি একমাত্রিক সেট (c) একটি অসীম সেট্ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

9. $A = \{(x, y) \in R^2 : y = e^x\}$ এবং $B = \{(x, y) \in R^2 : y = e^{-x}\}$ হলে, $A \cap B$ হবে

(a) ϕ (b) একটি একমাত্রিক সেট (c) একটি অসীম সেট্ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

10. $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0$ এবং $y = \log x\}$ এবং $B = \{(x, y) \in R^2 : y = -x\}$ হলে, $A \cap B$ হবে

(a) ϕ (b) একটি একমাত্রিক সেট (c) একটি অসীম সেট্ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

11. $A = \{(x, y) \in R^2 : y = \sin x\}$ এবং $B = \{(x, y) : x \in R, y = \frac{1}{2}\}$ হলে, $A \cap B$ হবে

(a) ϕ (b) একটি একমাত্রিক সেট (c) একটি অসীম সেট্ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

12. ধরি $A = \{y : y$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $\frac{1}{y} \in N\}$, তাহলে $n(A) =$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.

13. নীচের বিবৃতিগুলির কোন্‌টি সত্যি?

(a) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ (b) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$
(c) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ (d) $3 \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$.

14. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{3, 6, 8, 9\}$ এবং $D = \{2, 4, 8, 10\}$ হলে, $(A \Delta B) \Delta (C \Delta D) =$

(a) $\{1, 5, 6\}$ (b) $\{4, 8\}$ (c) $\{2, 3\}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

15. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ হলে, A-এর যেসব উপসেট্ C-এর জন্যে $B \Delta C = \{2\}$ হবে, তার সংখ্যা হল

(a) 2^4 (b) 2^5 (c) $2^4 - 1$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

16. $A = \{p, q, r, s\}$ হলে, $A \times A$-এর প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা

(a) $2^{16} - 2$ (b) 8 (c) $2^{16} - 1$ (d) 2^{16}.

17. যদি A সেটের ঠিক একটিই প্রকৃত উপসেট থাকে, তবে $n(\mathcal{P}(A \times A)) =$

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 1.

18. যদি A সেটটি গঠিত হয় সব 2×2 ক্রমের বাস্তব বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স দিয়ে এবং B সেট্‌টি গঠিত হয় সেই সব 2×2 ক্রমের বাস্তব ম্যাট্রিক্স C দিয়ে, যাদের জন্যে $\det C = 1$, তবে

(a) $A \cap B = \phi$ (b) $A \subseteq B$ (c) $B \subseteq A$ (d) $A = B$.

19. নীচের কোন সেট্‌টির প্রকৃত উপসেট্ নেই?

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x \leq 1\}$ (b) $B = \{x \in Q : 0 < x \leq 1\}$
(c) $C = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 2\}$ (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 = 1\}$.

20. $A = \{5^n - 4n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ এবং $B = \{16(n - 1) : n \in \mathbb{N}\}$ হলে,

(a) $A \subseteq B$ (b) $B \subseteq A$ (c) $A = B$ (d) $A \cap B = \phi$.

21. $A = \{5^{2n} - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ এবং $B = \{24(n - 1) : n \in \mathbb{N}\}$ হলে,

(a) $A \subseteq B$ (b) $A = B$ (c) $B \subseteq A$ (d) $A \cap B = \phi$.

22. ধরি $|A| = 10$, $|B| = 15$ এবং $|A \cup B| = 20$; তাহলে $|A \cap B| =$

(a) 5 (b) 4 (c) 6 (d) 10.

23. যদি যেকোনো দুটি অশূন্য সেট্ A এবং B-এর জন্যে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ হয়, তবে

(a) হয় $A \subseteq B$ নয় $B \subseteq A$ (b) $A = B$

(c) $A \cap B = \phi$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

24. যদি দুটি সেট্ A এবং B-এর জন্যে $n(A \cup B) = n(A) - n(B)$ হয়, তবে

(a) $B \subseteq A$ (b) $B = A$ (c) $B = \phi$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

25. $A = \{x : x$ হল 12-এর একটি মৌলিক উৎপাদক$\}$ এবং $B = \{1, 2, 3\}$ হলে,

(a) $A = B$ (b) $B \subseteq A$ (c) $n(A) = 2$ (d) $A \cap B = \{1, 3\}$.

26. $p\,\mathbb{N} = \{p.n : n \in \mathbb{N}\}$ এবং $\alpha\mathbb{N} \cap \beta\mathbb{N} = \gamma\mathbb{N}$, যেখানে $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ এবং α, β পরস্পর মৌলিক হলে,

(a) $\gamma = \alpha\beta$ (b) $\alpha = \gamma\beta$ (c) $\beta = \alpha\gamma$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

27. 100 জন ছাত্রের একটি শ্রেণীতে 55 জন অঙ্কে এবং 67 জন পদার্থবিদ্যায় উত্তীর্ণ হয়েছে। যদি প্রতিটি ছাত্রই কমপক্ষে একটি বিষয়ে উত্তীর্ণ হয়ে থাকে, তবে শুধুমাত্র অঙ্কেই উত্তীর্ণ হয়েছে এমন ছাত্রসংখ্যা

(a) 22 (b) 33 (c) 45 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

28. একটি অশূন্য সেট্ A-এর ওপর শূন্য সম্বন্ধটি

(a) স্বসম (b) স্বসম এবং প্রতিসম

(c) প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল (d) সংক্রমণশীল ও স্বসম।

29. ρ সম্বন্ধটি $\mathbb{Z}$-এর ওপর এমনভাবে সংজ্ঞায়িত যে $a\ \rho\ b \Leftrightarrow a^2 - b^2$ সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য ($\mathbb{Z}$-এ); তাহলে ρ সম্বন্ধটি

(a) শুধুই স্বসম (b) শুধুই প্রতিসম

(c) শুধুই স্বসম এবং সংক্রমণশীল (d) একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

30. A, B, C যদি X-এর উপসেট হয় এবং যদি $A \cap B = A \cap C$ ও $A \cup B = A \cup C$ হয়, তাহলে

(a) $A = B = C$ (b) $B = C$ (c) $A = C$ (d) $B = C = X$.

31. তিনটি সেট A, B, C-এর জন্যে $A \cap C = B \cap C$ এবং $A \cap C' = B \cap C'$ (যেখানে C' বলতে C-এর পূরক সেট বোঝাচ্ছে) হলে,

(a) $A = B$ (b) $B = C$ (c) $A = C$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

32. তিনটি সেট A, B, C-এর জন্যে, $(A' \cap B' \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) =$

(a) A (b) B (c) C (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

33. ϕ শূণ্য সেট্কে বোঝালে,

(a) $\phi \in \{\{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ (b) $\{\phi\} \subseteq \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

(c) $\{\phi, \{\phi\}\} \subseteq \{\{\phi\}, \{\phi, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$ (d) এগুলির কোনোটিই সত্যি নয়।

34. A, B, C যেকোনো তিনটি সেট্ হলে,

(a) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ (b) $A \cap B = \phi \Rightarrow A = \phi$ বা $B = \phi$.

(c) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow B = A$ (d) এগুলির কোনোটিই সত্যি নয়।

35. নীচের কোন বিবৃতিটি সত্য?

(a) এমন একটি সেট্ X-এর অস্তিত্ব আছে যার ঘাতসেট এর উপাদান সংখ্যা 10.

(b) যেকোনো তিনটি সেট A, B, C-এর জন্যে $A \setminus B = A \setminus C \Rightarrow B = C$.

(c) $\{\phi\}$ সেট্‌টি যেকোনো সেটের উপসেট।

(d) এমন দুটি সেট A, B থাকতে পারে যে $A \in B$ এবং $A \subseteq B$ উভয়ই সত্য হবে।

36. A, B যেকোনো তিনটি সেট্ হলে,

(a) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ (b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

(c) $A \cup B = A \Rightarrow B = \phi$ (d) এর একটিও না ঘটতে পারে।

37. $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 5, 7\}$ হলে,

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (b) $A \cap (B \cup C) = A$

(c) $A \cup (B \cap C) = C$ (d) এগুলির কোনোটিই সত্যি নয়।

38. A, B সেট্ দুটি X সেটের উপসেট হলে,

(a) $A \cup B = X \Rightarrow A = B'$ (b) $A \cup B = X \Leftrightarrow A' \cap B' = \phi$

(c) $(A \times B)' = A' \times B'$ (d) $A \cup B = B \Rightarrow A = \phi$.

39. নীচের কোন বিবৃতিটি সত্য?

(a) A, B যেকোনো দুটি সেট হলে, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \phi$ হতে পারে।

(b) $\phi \in \{0, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$,

(c) ধরি $A \subseteq U$. তাহলে U-এর সব উপসেট B-এর জন্যে, $A \cap B = B$ হবে শুধুমাত্র যদি $A = B$ হয়।

(d) ধরি $A \subseteq U$. তাহলে U-এর সব উপসেট B-এর জন্যে, $A \cup B = B$ হবে শুধুমাত্র যদি $A = \phi$ হয়।

40. সসীম সেট A-এর উপাদান সংখ্যা $n(A)$ চিহ্ন দিয়ে বোঝানে হয়। তাহলে

(a) $n(A) = m$ এবং $n(B) = r \Rightarrow n(A \times B) = 2^{mr}$

(b) এমন কোনো একাধিক উপাদান বিশিষ্ট সসীম সেট A, B থাকতে পারে না, যাদের জন্যে $n(A \times B) = 29$ হয়

(c) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, যেখানে A, B দুটি সসীম সেট্

(d) $n(\mathcal{P}(\phi)) = 2$.

41. নীচের কোন্ বিবৃতিটি মিথ্যা?

(a) যেকোনো তিনটি অশূণ্য-সেট A, B, C-এর জন্যে, $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

(b) যেকোনো দুটি সেট্ A, B-এর জন্যে, $A' \setminus B' \subseteq B \setminus A$.

(c) যেকোনো তিনটি সেট্ A, B, C-এর জন্যে, $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

(d) যেকোনো দুটি সেট্ A, B-এর জন্যে, $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

42. কোনো সেট্ Aকে অপর একটি সেট্ B-এর উপসেট হতে গেলে, নীচের কোন্ শর্তটি প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত নয়?

(a) $A \cap B' = \phi$ (b) $A' \cap B = \phi$ (c) $B' \subseteq A'$ (d) $A \cup B = B$.

43. A, B, C যেকোনো তিনটি সেট্ হলে

(a) যদি $A \cap B = \phi$ হয়, তবে এমন C নির্ণয় করা সম্ভব যাতে $(C \times A) \cap (C \times B) \neq \phi$ হয়

(b) $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

44. নীচের কোন্‌টি সঠিক বিবৃতি?

(a) $n(A) + n(B) > n(A \cup B)$, যেকোনো দুটি সসীম সেট্ A ও B-এর জন্যে।

(b) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$, যেকোনো তিনটি সেট্ A, B, C-এর জন্যে।

(c) $\{\phi\}$ সেট্‌টি যেকোনো অশূণ্য সেট্ A-এর উপসেট।

(d) $A = \{a, e, m, n, t\}$, $B = \{i, 0, u, m, n, t\}$, $X = \{x : x$ ইংরেজী বর্ণমালার স্বরবর্ণ$\}$ হলে, $A \Delta B = X$.

45. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $\rho = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$ হলে, ρ সম্বন্ধটি

(a) A থেকে B-তে একটি অপেক্ষক (b) সংক্রমণশীল কিন্তু প্রতিসম নয়

(c) স্বসম (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

46. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$ হলে, A-এর ওপর ρ সম্বন্ধটি

(a) একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ

(b) স্বসম, প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণশীল নয়

(c) স্বসম কিন্তু প্রতিসম বা সংক্রমণশীল নয়

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

47. $A = \{p, q, r\}$, হলে, A সেটের উপর যতগুলি ভিন্ন ভিন্ন সম্বন্ধ সংজ্ঞায়িত করা যায় তার সংখ্যা

(a) 2×3 (b) 2^3 (c) 2^6 (d) 2^9.

48. $\mathbb{N}$ সেটের ওপর ρ সম্বন্ধের সংজ্ঞা ঃ $a\rho b \Leftrightarrow 2a + b = 41$; তাহলে $D(\rho)$ (অর্থাৎ ρ-এর ক্ষেত্র) হবে

(a) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 40\}$ (b) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 41\}$

(c) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 20\}$ (d) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 21\}$.

49. $\mathbb{N}$ সেটের ওপর ρ সম্বন্ধের সংজ্ঞা : $a\rho b \Leftrightarrow 2a + b = 7$; তাহলে

(a) ρ সম্বন্ধটি $\mathbb{N}$-এর ওপর একটি অপেক্ষক (b) ρ সম্বন্ধটি স্বসম

(c) ρ প্রতিসম (d) ρ স্বসম বা প্রতিসম নয়।

50. $\mathbb{N}$ সেটের ওপর ρ সম্বন্ধের সংজ্ঞা : $a\rho b \Leftrightarrow a + b = 20$; তাহলে

(a) ρ সম্বন্ধটি $\mathbb{N}$-এর ওপর একটি অপেক্ষক (b) ρ স্বসম এবং প্রতিসম

(c) ρ স্বসম নয় কিন্তু প্রতিসম (d) ρ সম্বন্ধটি সংক্রমণশীল।

51. $\mathbb{Z}$ সেটের ওপর ρ সম্বন্ধের সংজ্ঞা : $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow |a| < 3$ এবং $b = |a - 4|$. তাহলে ρ-এর প্রসার (range) হল

(a) $\{x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le 7\}$ (b) $\{x \in \mathbb{N} : 2 \le x \le 7\}$

(c) $\{x \in \mathbb{N} : 2 \le x \le 6\}$ (d) $x \in \mathbb{N} : 1 \le x \le 6\}$.

52. $\mathbb{N}$ সেটের ওপর ρ সম্বন্ধের সংজ্ঞা : $\rho = (x + 3, 2x, - 1) : x \in \mathbb{N}, 1 \le x^2 \le 31\}$, তাহলে ρ^{-1} হল

(a) $\{(4, 1), (5, 3), (6, 5), (7, 7), (8, 9)\}$

(b) $\{(4, 1), (5, 3), (6, 5), (7, 7), (8, 9), (9, 11)\}$

(c) $\{1, 4), (3, 5), (5, 6), (7, 7), (9, 8)\}$

(d) $\{(1, 4), (3, 5), (6, 5), (7, 7), (9, 8)\}$.

53. একটি অশূন্য সেট A-এর ওপর ρ_1 এবং ρ_2 দুটি সম্বন্ধ হলে নীচের বিবৃতিগুলির মধ্যে কোনটি সঠিক?

(a) $\rho_1 \cup \rho_2$ প্রতিসম $\Rightarrow \rho_1$ এবং ρ_2 উভয়েই প্রতিসম।

(b) ρ_1 এবং ρ_2 উভয়েই সংক্রমণশীল $\Rightarrow \rho_1 \cup \rho_2$ সংক্রমণশীল।

(c) ρ_1 এবং ρ_2 উভয়েই সংক্রমণশীল $\Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ সংক্রমণশীল।

(d) ρ_1 এবং ρ_2 উভয়েই স্বসম $\Rightarrow \rho_1 \cap \rho_2$ স্বসম নয়।

54. একটি অশূন্য সেট A-এর ওপর ρ একটি সম্বন্ধ এবং $\rho = \rho^{-1}$ হলে, ρ সম্বন্ধটি

(a) স্বসম (b) প্রতিসম (c) সংক্রমণশীল (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

55. $\mathbb{Z}$ সেটের ওপর ρ এমন একটি সম্বন্ধ যে $(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a - b$ সংখ্যাটি ($\mathbb{Z}$-এ) 12 দ্বারা বিভাজ্য; তাহলে ρ সম্বন্ধটি

(a) স্বসম নয় (b) প্রতিসম নয়

(c) সংক্রমণশীল নয় (d) স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল।

56. ধরি, অশূন্য সেট A-এর ওপর ρ_1 এবং ρ_2 দুটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ; তাহলে নীচের কোন্ বিবৃতিটি সঠিক?

(a) $\rho_1 \cap \rho_2$ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। (b) $\rho_1 \cap \rho_2$ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ নয়।

(c) $\rho_1 \setminus \rho_2$ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। (d) $\rho_2 \setminus \rho_1$ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

65. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$ এবং $\rho = \{(x, y) \in A \times A : |x - y|$ সংখ্যাটি ($\mathbb{Z}$-এ) 3 দ্বারা বিভাজ্য\}; আবার $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ এবং $\theta = \{(x, y) \in B \times B : x - y$ সংখ্যাটি ($\mathbb{Z}$-এ) 3 দ্বারা বিভাজ্য\}। তাহলে

(a) ρ সম্বন্ধটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ নয়

(b) θ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ

(c) ρ সমতুল্যতা সম্বন্ধ কিন্তু θ তা নয়

(d) ρ সংক্রমণসীল নয় কিন্তু θ সংক্রমণশীল।

66. $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$ সম্বন্ধটি

(a) স্বসম এবং প্রতিসম (b) স্বসম এবং সংক্রমণশীল

(c) প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

67. ধরি $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ এবং A-এর ওপর ρ এমন একটি সম্বন্ধ যে $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$ (যেখানে $(a, b), (c, d) \in A$). তাহলে ρ সম্বন্ধটি

(a) স্বসম এবং প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণশীল নয়

(b) প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল কিন্তু স্বসম নয়

(c) স্বসম এবং সংক্রমণশীল কিন্তু প্রতিসম নয়

(d) একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

68. ধরি $\mathbb{R}^2$-এর ওপর ρ-এর সংজ্ঞা : $(x, y)\ \rho\ (z, t) \Leftrightarrow x = z$, যেখানে $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$ তাহলে $\mathbb{R}^2$-এর সেই সব বিন্দু যারা $(0, 0)$-এর সাথে ρ সম্বন্ধে সম্পর্কিত তারা যে সেট গঠন করবে তা হল

(a) $\mathbb{R}^2$ (b) x-অক্ষ ও y-অক্ষের ওপর যাবতীয় বিন্দু দিয়ে গঠিত সেট

(c) x-অক্ষ (d) y-অক্ষ।

69. বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$-এর ওপর ρ-এর সংজ্ঞা, $x\ \rho\ y\ (x, y, \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

(a) $|x - y| < 2$ হলে, ρ স্বসম কিন্তু প্রতিসম বা সংক্রমণশীল নয়

(b) $x - y < 2$ হলে, ρ স্বসম ও প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণশীল নয়

(c) $|x| \geq y$ হলে, ρ স্বসম এবং সংক্রমণশীল কিন্তু প্রতিসম নয়

(d) $x > |y|$ হলে, ρ সংক্রমণশীল কিন্তু স্বসম বা প্রতিসম নয়।

70. ধরি $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$-এর সংজ্ঞা $f(x) = x^2 + 1 (x \in \mathbb{N})$; তাহলে f অপেক্ষকটি

(a) পরিব্যাপ্ত কিন্তু একৈক নয় (b) একৈক কিন্তু পরিব্যাপ্ত নয়

(c) পরিব্যাপ্ত বা একৈক কোনোটিই নয় (d) একৈক পরিব্যাপ্ত।

71. $f : (0, 1) \to (a, b)$অপেক্ষকটির সংজ্ঞা $f(x) = a + (b - a)x\ (x \in (0, 1))$ হলে, অপেক্ষকটি

(a) পরিব্যাপ্ত কিন্তু একৈক নয় (b) একৈক কিন্তু পরিব্যাপ্ত নয়

(c) পরিব্যাপ্ত বা একৈক কোনোটিই নয় (d) একৈক পরিব্যাপ্ত।

72. $f : X \to Y$ একটি চিত্রণ হলে,

(a) সকল $B \subseteq Y$-এর জন্যে $ff^{-1}(B) = B$ হবে

(b) সকল $A \subseteq Y$-এর জন্যে $f^{-1}\, f(A) \subseteq A \Rightarrow f$ এককৈক

(c) সকল $B \subseteq Y$-এর জন্যে $ff^{-1}(B) \subseteq B \Rightarrow f$ এককৈক

(d) একটিও ঠিক নয়।

73. $f, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $h(x) = 10x + 10$ এবং $f(x) = 2x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$. তাহলে $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $h = gof$, এর সংজ্ঞা হবে

(a) $g(x) = x + 1$ (b) $g(x) = 10x + 1$

(c) $g(x) = 5x + 5$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

74. $f : A \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, যখন $A = \{-5, -4, -3, -2, 0, 1, 3\}$, অপেক্ষকটি

(a) এককৈক কিন্তু পরিব্যাপ্ত নয় (b) পরিব্যাপ্ত কিন্তু এককৈক নয়

(c) এককৈক পরিব্যাপ্ত (d) এককৈক বা পরিব্যাপ্ত কোনোটিই নয়।

75. $f : X \to Y$ যেকোনো চিত্রণ হলে, নীচের কোন্ বিবৃতিটি ভুল?

(a) সকল $A, B \subseteq X$-এর জন্যে $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) সকল $C, D \subseteq Y$-এর জন্যে $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(c) সকল $A, B \subseteq X$-এর জন্যে $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(d) সকল $C, D \subseteq Y$-এর জন্যে $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

76. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ যদি } x \geq 0 \text{ হয়} \\ 2x + 3, \text{ যদি } x < 0 \text{ হয়;} \end{cases}$

তাহলে f অপেক্ষকের প্রসার

(a) $\mathbb{R}$ (b) $\mathbb{Q}$ (c) ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

77. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, যেখানে $f(x) = 2^x$, অপেক্ষকটি

(a) এককৈক কিন্তু পরিব্যাপ্ত নয় (b) পরিব্যাপ্ত কিন্তু এককৈক নয়

(c) এককৈক বা পরিব্যাপ্ত কোনোটিই নয় (d) এককৈক-পরিব্যাপ্ত

78. নীচের বিবৃতির কোন্‌টি সত্য?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, যেখানে $f(x) = x + 2$, চিত্রণটি এককৈক-পরিব্যাপ্ত।

(b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, যেখানে $f(x) = 3x + 7$, চিত্রণটি এককৈক-পরিব্যাপ্ত।

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^3 - x$, চিত্রণটি এককৈক।

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, যেখানে $f(x) = x^2 - 3$, হলে $f^{-1}(\sqrt{2}) = \phi$.

79. নীচের কোন্ সংযোগের সূত্রটি (rule of correspondence) অপেক্ষক হচ্ছে?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = \log x$

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ যেখানে $f(x) = 2x - 7$ ($\mathbb{R}^+$ বলতে ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট বোঝাচ্ছে)

(c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$ যেখানে $f(x) = \sin(e^x) - 2$

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ যেখানে $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

80. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি প্রসার, যেখানে

(a) $f(x) = x^2 + 1$ হল $[1, \infty)$ (b) $f(x) = \sin x$ হল $\mathbb{R}$

(c) $f(x) = x^2$ হল $\mathbb{R}$ (d) $f(x) = e^x$ হল $[1, \infty)$.

81. ধর $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ যেখানে $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যখন } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{অন্যথায়; তাহলে} \end{cases}$

(a) $f \circ f \left(\sqrt{2}\right) = 0$ (b) $f \circ f\ (1.2345 + \sqrt{3}) = 1$

(c) $f \circ f$ এর প্রসার $\{0, 1\}$ (d) $f \circ f$ এর ক্ষেত্র $\mathbb{R}$.

82. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ যেখানে $f(n) = n - (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ একৈক-পরিব্যাপ্ত অপেক্ষকটির বিপরীত অপেক্ষক হল

(a) $f^{-1}(n) = n \pm 1$, যখন $n \in \mathbb{N}$

(b) $f^{-1}(n) = n^2 - 1$, যখন $n \in \mathbb{N}$

(c) $f^{-1}(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{যদি } n \text{ জোড় সংখ্যা হয়} \\ n + 1, & \text{যদি } n \text{ বিজোড় সংখ্যা হয়} \end{cases}$

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

83. ধরি A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. তাহলে,

(a) A এর উপর যেকোনো সম্বন্ধকেই A থেকে A তে অপেক্ষক বলে ভাবা চলে

(b) এমনকোনো পরিব্যাপ্ত চিত্রণ $f : A \to A$ থাকবে না যা একৈক নয়

(c) অন্তত একটি ঐকৈক চিত্রণ $f : A \to A$ থাকবে যা পরিব্যাপ্ত নয়

(d) প্রতিটি চিত্রণ $f : A \to A$-এর প্রসার অবশ্যই A হবে।

84. $f : A \to B$, $g : B \to C$ এবং $h : B \to C$ যদি এমন চিত্রণ হয় যে $g \circ f = h \circ f$ হবে, তাহলে

(a) $g = h$ (b) $g = h$ যদি f একৈক হয়

(c) $g = h$ যদি f is পরিব্যাপ্ত হয় (d) এগুলির একটিও ঠিক নয়।

85. ধরি $\mathbb{Z}$ থেকে $\mathbb{Z}$-এ তিনটি চিত্রণ f, g এবং h-এর সংজ্ঞা $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ এবং $h(x) = x + 1$, যেখানে $x \in \mathbb{Z}$, তাহলে

(a) f , g ও h-এর অন্তত দুটি একৈক চিত্রণ এবং $fh \neq hf$

(b) f, g ও h-এর অন্তত একটি একৈক চিত্রণ এবং $fh = hf$

(c) f, g ও h-এর কেউই ঐকৈক চিত্রণ নয় এবং $fh \neq hf$

(d) f, g ও h-এর মধ্যে ঠিক একটিই ঐকৈক চিত্রণ এবং $fh \neq hf$.

86. ধরি কোনো ইংরেজী শব্দকোষ-এর শব্দগুলির সেট W, R সম্বন্ধটি W-এর উপর সংজ্ঞায়িত যেখানে $R = \{(x, y) \in W \times W$: x এবং y শব্দ দুটির মধ্যে অন্তত একটি সাধারণ অক্ষর (common letter) আছে$\}$। তাহলে R সম্বন্ধটি

(a) স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল

(b) স্বসম কিন্তু প্রতিসম বা সংক্রমণশীল নয়

(c) স্বসম নয়, প্রতিসম বা সংক্রমণশীলও নয়

(d) স্বসম, প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণশীল নয়। **[AIEEE, 2006]**

87. ধর $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ হল A-এর ওপর একটি সম্বন্ধ; তাহলে ρ সম্বন্ধটি

(a) শুধুই স্বসম কিন্তু প্রতিসম বা সংক্রমণশীল নয়

(b) স্বসম এবং প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণশীল নয়

(c) স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

88. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $\rho = \{(1, 1), (2, 2)\}$ হল A-এর ওপর একটি সম্বন্ধ; তাহলে ρ সম্বন্ধটি

(a) স্বসম এবং প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণশীল নয়

(b) স্বসম নয় যদিও প্রতিসম এবং সংক্রমণশীল

(c) একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

89. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $\rho = \{(1, 1)\} \subseteq A \times A$; তাহলে ρ

(a) A-এর ওপর সম্বন্ধ হবে না

(b) A-এর ওপর একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ

(c) A-এর ওপর একটি স্বসম সম্বন্ধ যা প্রতিসম বা সংক্রমণশীল নয়

(d) A-এর ওপর সংক্রমণশীল সম্বন্ধ যা প্রতিসমও বটে কিন্তু স্বসম নয়।

90. $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (2, 2)\}$ A-এর ওপর একটি সম্বন্ধ। তাহলে ρ

(a) A-এর ওপর একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ

(b) একটি প্রতিসম সম্বন্ধ যা স্বসম নয়

(c) একটি প্রতিসম ও সংক্রমণশীল সম্বন্ধ যা স্বসম নয়

(d) উপরের কোনো বিবৃতিই ঠিক নয়।

উত্তর

	(a)	(b)	(c)	(d)		(a)	(b)	(c)	(d)		(a)	(b)	(c)	(d)
1.	○	○	●	○	31.	●	○	○	○	61.	○	●	○	○
2.	○	○	●	○	32.	○	○	●	○	62.	○	○	○	●
3.	●	○	○	○	33.	○	●	○	○	63.	○	●	○	○
4.	○	●	○	○	34.	○	○	●	○	64.	●	○	○	○
5.	○	○	●	○	35.	○	○	○	●	65.	○	●	○	○
6.	○	●	○	○	36.	○	●	○	○	66.	○	○	○	●
7.	○	○	○	●	37.	○	●	○	○	67.	○	○	○	●
8.	●	○	○	○	38.	○	●	○	○	68.	○	○	○	●
9.	○	●	○	○	39.	○	○	○	●	69.	○	○	○	●
10.	○	●	○	○	40.	○	●	○	○	70.	○	●	○	○
11.	○	○	●	○	41.	●	○	○	○	71.	○	○	○	●
12.	○	●	○	○	42.	○	●	○	○	72.	○	●	○	○
13.	○	●	○	○	43.	○	○	●	○	73.	○	○	●	○
14.	○	○	○	●	44.	○	○	○	●	74.	○	○	○	●
15.	○	○	○	●	45.	○	○	○	●	75.	○	○	●	○
16.	○	○	●	○	46.	○	○	●	○	76.	●	○	○	○
17.	●	○	○	○	47.	○	○	○	●	77.	○	○	○	●
18.	○	○	●	○	48.	○	○	●	○	78.	○	●	○	○
19.	○	○	●	○	49.	○	○	○	●	79.	○	○	○	●
20.	●	○	○	○	50.	○	○	●	○	80.	●	○	○	○
21.	●	○	○	○	51.	○	○	●	○	81.	○	●	○	○
22.	●	○	○	○	52.	○	○	●	○	82.	○	○	●	○
23.	○	○	●	○	53.	○	○	●	○	83.	○	●	○	○
24.	○	○	●	○	54.	○	●	○	○	84.	○	○	●	○
25.	○	○	●	○	55.	○	○	○	●	85.	○	○	○	●
26.	●	○	○	○	56.	●	○	○	○	86.	○	○	○	●
27.	○	●	○	○	57.	○	○	○	●	87.	○	○	●	○
28.	○	○	●	○	58.	○	○	●	○	88.	○	●	○	○
29.	○	○	○	●	59.	○	○	●	○	89.	○	○	○	●
30.	○	●	○	○	60.	○	○	●	○	90.	○	●	○	○

সংকেত/সমাধান

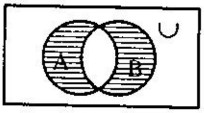
1. **(c)** $1, -1 \in A$, $1 \in B$. এখন, $x + \frac{1}{x} + 1 = 0 \Rightarrow x = \omega$ এবং ω^2. সুতরাং $C = \phi$.

2. **(c)** এখানে লসাগু $(4, 10) = 20$; অতএব $4\mathbb{N} \cap 10\mathbb{N} = 20\mathbb{N}$.

3. **(a)** $(A \cup B)' \cup (A' \cap B) = (A' \cap B') \cup (A' \cap B)$ (De Morgan-এর সূত্র থেকে) $= A' \cap (B' \cup B) = A'$.

4. **(b)** ভেন চিত্র থেকে সহজেই পাই,

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$= (A \cup B) \setminus (A' \cap B)$

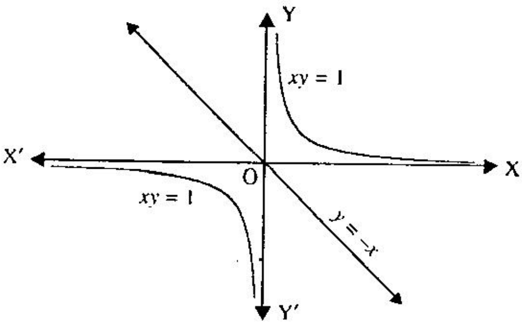


চিত্র 1

5. **(c)** $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \phi \Rightarrow A \setminus B = \phi$ এবং $B \setminus A = \phi$

$\Rightarrow A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

6. **(b)** $y = \frac{1}{x}$ বা, $xy = 1$ এবং $y = -x$ বক্র দুটি পরস্পরকে ছেদ করে না। সুতরাং $A \cap B = \phi$ (চিত্র 2).



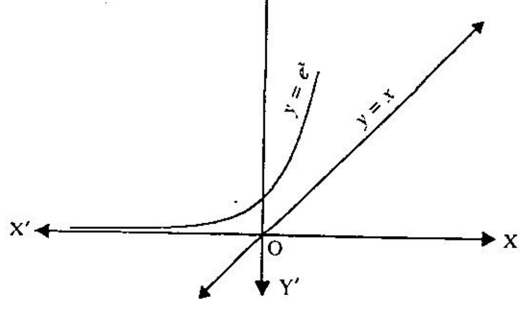
চিত্র 2

7. **(d)** এখানে $A' \cup ((A \cup B) \cap B') = A' \cup ((A \cap B') \cup (B \cap B'))$

$= A' \cup (A \cap B') = (A' \cup A) \cap (A' \cup B')$
$= A' \cup B' = (A \cap B)' = \phi' = \mathbb{N}$

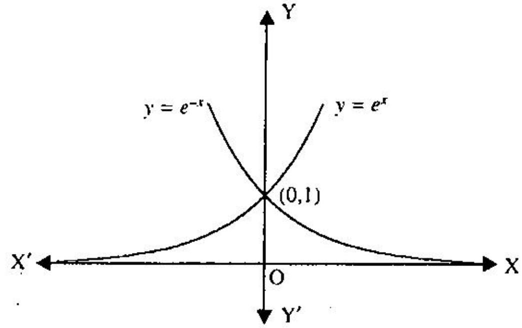
[যেহেতু $A \cap B = \phi$]

8. **(a)** এখানে $A \cap B$ বলতে বোঝায় $y = e^x$ এবং $y = x$ এর লেখচিত্র দুটির সাধারণ বিন্দুগুলির সেট্‌কে। যেহেতু সঙ্গের চিত্র 3 থেকে দেখা যাচ্ছে যে এই লেখচিত্র দুটি পরস্পরছেদী নয়, সুতরাং $A \cap B = \phi$.



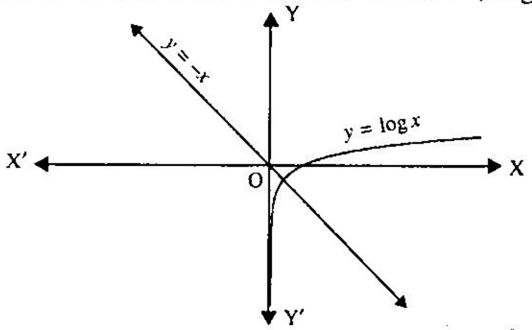
চিত্র 3

9. **(b)** লেখচিত্র থেকে পাই, স্পষ্টতই $A \cap B = \{(0, 1)\}$



চিত্র 4

10. **(b)** লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে $A \cap B$ একটি একমাত্রিক (singleton) সেট্।



চিত্র 5

11. **(c)** প্রকৃতপক্ষে এখানে $A \cap B = \{(x, y) : y = \sin x = \frac{1}{2}\}$

$$= \{\left(x, \frac{1}{2}\right) : x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{N}\}$$

যা একটি অসীম সেট।

12. **(b)** এখানে $A = \{1\}$.

14. **(d)** এখানে $A \Delta B = \{1, 4, 5, 7\}$, $C \Delta D = \{3, 6, 9, 2, 4, 10\}$.

$\therefore (A \Delta B) \Delta (C \Delta D) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

15. **(d)** $B \Delta C = (B - C) \cup (C - B) = \{2\}$ হতে পারে কেবলমাত্র যখন

$C - B = \phi$ এবং $B - C = \{2\}$ অর্থাৎ,

$\Rightarrow C \subseteq B$ এবং C-এর উপাদান হিসেবে 1, 3, 4, 5 থাকবে।

$\Rightarrow C = \{1, 3, 4, 5\}$.

16. **(c)** এখানে $n(A \times A) = 16$. তাই $n(\mathcal{P}(A \times A)) = 2^{16}$; এগুলির মধ্যে $A \times A$ নিজেই অন্যতম সেট্, যা $A \times A$ সেট্রের অপ্রকৃত উপসেট।

17. **(a)** প্রশ্নানুযায়ী A সেটটি একমাত্রিক।

তাই $A \times A$ সেট্‌টিও একমাত্রিক এবং সেহেতু $n(\mathcal{P}(A \times A)) = 2^1 = 2$.

18. **(c)** যেকোনো বর্গম্যাট্রিক্স C এর জন্যে det C = 1 হলে, ম্যাট্রিক্সটি বিপরিতকরণযোগ্য। সুতরাং $x \in B \Rightarrow x \in A$. অতএব $B \subseteq A$.

কিন্তু এমন কিছু বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স X রয়েছে যাদের জন্যে det X ≠ 1, অতএব $A \nsubseteq B$.

19. **(c)** যেহেতু এখানে $C = \phi$, তাই C-এর প্রকৃত উপসেট থাকবে না।

20. **(a)** এখানে
$$\begin{aligned} A &= \{(1+4)^n - 4n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{{}^nC_2\, 4^2 + {}^nC_3\, 4^3 + \ldots + {}^nC_n\, 4^n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{16({}^nC_2 + {}^nC_3\, 4 + \ldots + {}^nC_n\, 4^{n-2}) : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

সুতরাং A হল 16-এর কিছু ধনাত্মক গুণিতকের সেট (শূণ্য সহ) (n = 1-এর জন্যে) এবং B হল 16-এর সমস্ত ধনাত্মক গুণিতক (শূণ্য সহ); অতএব $A \subseteq B$.

21. **(a)** 20 নং এর অনুরূপ।

22. **(a)** এখন $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Rightarrow 20 = 10 + 15 - n\,(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$.

23. **(c)** যেহেতু $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, অতএব প্রশ্ন অনুসারে $n(A \cap B) = 0 \Rightarrow A \cap B = \phi$.

24. **(c)** যেহেতু $A \subseteq A \cup B$, তাই $n(A) \leq n(A \cup B) \Rightarrow n(A \cup B) \geq n(A) - n(B)$. কিন্তু, দেওয়া আছে $n(A \cup B) = n(A) - n(B)$ — যা সম্ভব কেবলমাত্র যদি $n(B) = 0$ হয়; সুতরাং $B = \phi$.

25. **(c)** এখানে $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

26. **(a)** এখানে $\alpha\,\mathbb{N} \cap \beta\,\mathbb{N} = \gamma\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \gamma = \text{লসাগু}\,(\alpha, \beta) \Rightarrow \gamma = \alpha\beta.$$

27. **(b)** এখানে $n(M) = 55$, $n(P) = 67$.

$\Rightarrow n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$

$\Rightarrow 100 = 55 + 67 - n(M \cap P)$

$\Rightarrow n(M \cap P) = 22$.

সুতরাং শুধু অঙ্কে পাশ করেছে এমন ছাত্রের সংখ্যা = $n(M) \setminus n(M \cap P) = 33$.

28. **(c)** ধরা যাক একটি অশূন্য সেট A-এর উপর ρ একটি শূন্য সম্বন্ধ; তাহলে $a \notin$ A-এর জন্য $(a, a) \notin \rho$ সুতরাং, ρ স্বসম নয়। অন্য দুটি শর্ত শূন্যগর্ভভাবে (vacuously) সিদ্ধ।

29. **(d)** যেহেতু $n \in \mathbb{Z}$ হলেই $n^2 - n^2$ সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য, তাই ρ স্বসম।

এখন $a\ \rho\ b \Rightarrow a^2 - b^2 = 5k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 - a^2 = 5(-k),\ -k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b\ \rho\ a$. সুতরাং ρ প্রতিসম।

এখন, $a\ \rho\ b$, $b\ \rho\ c \Rightarrow a^2 - b^2 = 5k_1$, $b^2 - c^2 = 5k_2$, যেখানে $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow a^2 - c^2 = 5(k_1 + k_2),\ k_1 + k_2 \in Z$

$\Rightarrow a\ \rho\ c \Rightarrow \rho$ সংক্রমণশীল।

30. **(b)** যদি $B \neq C$ হয়, ধর $x \in B$ এবং $x \notin C$. এখন

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$ কিন্তু $x \notin A \cap C$, — যা পরস্পরবিরোধী।

$x \notin A \Rightarrow x \in A \cup B$, কিন্তু $x \notin A \cup C$, যা অসম্ভব।

সুতরাং $B \subseteq C$. একইভাবে $C \subseteq B$. সুতরাং $B = C$.

31. **(a)** $A = A \cap (C \cup C') = (A \cap C) \cup (A \cap C') = (B \cap C) \cup (B \cap C') = B \cap (C \cup C') = B$.

32. **(c)** $(A' \cap B' \cap C] \cup [(B \cup A) \cap C] = [(A \cup B)' \cup (A \cup B)] \cap C = U \cap C$ (U হল সার্বিক সেট) $= C$.

33. **(b)** $\{\phi\}$ সেটটিতে একটিই উপাদান আছে, যা হল ϕ নিজে এবং ϕ-কে $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ সেটের অন্যতম উপাদান বলেও পাচ্ছি। তাই (b) সত্য।

34. **(c)** $x \in A$, $x \notin B \Rightarrow x \in A \cup B$ কিন্তু $x \notin A \cap B$, যা সম্ভব নয়। তাই $A \subseteq B$. অনুরূপে $B \subseteq A$. সুতরাং (c) সত্য।

35. **(d)** ধরা যাক $A = \{2\}$ এবং $B = \{2, \{2\}\}$, তাহলে $A \in B$ এবং $A \subseteq B$.

36. **(b)** $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow C \subseteq A$ এবং $C \subseteq B \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \in \mathcal{P}(A \cap B)$. সুতরাং (b) সঠিক।

37. **(b)** $B \cup C = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ এবং তাই $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 5\} = A$. সুতরাং (b) সত্য।

38. **(b)** De Morgan-এর সূত্র থেকে $(A \cup B) = X \Leftrightarrow \phi = X' = (A \cup B)' = A' \cap B'$.

39. **(d)** প্রতিটি $B \subseteq U$-এর জন্যে $A \cup B = B$, $\Rightarrow A \cup \phi = \phi \Rightarrow A = \phi$. সুতরাং (d) সত্য।

40. **(b)** যেহেতু $n(A) > 1$, $n(B) > 1$ এবং যেহেতু $n(A \times B) = n(A).\ n(B)$, তাই $n(A \times B) = 29$ থেকে পাই হয় $n(A) = 1$, $n(B) = 29$ বা $n(B) = 1$ এবং $n(A) = 29$ ($\because$ 29 একটি মৌলিক সংখ্যা) যা অসম্ভব। সুতরাং (b) সঠিক।

41. **(a)** $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ এবং $C = \{3\}$ নিলে, $(1, 2) = a$(ধরে) $\in A \times B$ এবং $(a, 3) \in (A \times B) \times C$. প্রদত্ত সম্পর্ক সত্য হলে $(a, 3) \in A \times (B \times C)$ যাতে $a = (1, 2) \in A$ এবং $3 \in B \times C$ হয়, যা অসম্ভব। সুতরাং (a) সত্য নয়।

42. **(b)** ধরি $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ হল সার্বিক সেট, যার সাপেক্ষে A' ও B' নেওয়া হয়েছে। এখন $A \subseteq B$, কিন্তু $A' \cap B = \{3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{3, 4\} \neq \phi$. সুতরাং $A \subseteq B$ হবার জন্য (b) শর্তটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট নয়।

43. **(c)** $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ এবং $x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A$, $x \notin B$ এবং $x \notin C$

$\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ এবং $x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

সুতরাং $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. অতএব (c) সত্য।

[(a) সত্যি হলে যদি কোনো সেট C-এর জন্যে $(x, y) \in (C \times A) \cap (C \times B)$ হয়, তবে $x \in C$, $y \in A$ এবং $y \in B$ হবে এবং সেক্ষেত্রে $A \cap B \neq \phi$ হবে।

(b) সত্যি হলে, ধর $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$. তাহলে $A \cap (B \setminus C) = A \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$, যেখানে $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 5\}$.

অতএব (a) এবং (b) মিথ্যা।

44. (d) (a)-এর ক্ষেত্রে, ধর $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$; তাহলে $n(A) + n(B) = 2 + 2 = 4 = n(A \cup B)$.

(b)-এর ক্ষেত্রে, ধর $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{3, 4\}$; তাহলে $A \cup B = A \cup C = A$, কিন্তু $B \neq C$.

(c)-এর বেলায়, লক্ষ কর $\{\phi\} \not\subseteq \{1, 2\}$.

সুতরাং (a), (b), (c) সত্য হতে পারে না।

(d)-এর জন্যে, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{a, e\} \cup \{i, 0, u\} = \{a, e, i, o\ u\} = X$. অতএব (d) সত্য।

45. (d) $3 \in A$ কিন্তু $3 \notin D(\rho)$, সুতরাং ρ অপেক্ষক নয়। $(1, 2), (2, 4) \in \rho$ কিন্তু $(1, 4) \notin \rho$. সুতরাং, এটি সংক্রমণশীল নয়, $(1, 1) \notin \rho$, সুতরাং এটি স্বসম নয়। অতএব (d) সঠিক।

46. (c) $(4, 3) \in \rho$ কিন্তু $(3, 4) \notin \rho \Rightarrow \rho$ প্রতিসম নয়। অতএব (a) এবং (b) সঠিক নয়। আবার $(4, 3), (3, 2) \in \rho$ কিন্তু $(4, 2) \notin \rho$, সুতরাং ρ সংক্রমণশীল নয়। স্পষ্টতই ρ স্বসম। সুতরাং (c) সঠিক।

47. (d) A সেটের উপর পৃথক পৃথক সম্বন্ধের সংখ্যা হবে 2^9, যা $A \times A$-এর মোট উপসেটের সংখ্যার সমান।

48. (c) $D(\rho) = \{a \in \mathbb{N} : b \in \mathbb{N}$ এবং $b = 41 - 2a\}$
$= \{1, 2, \ldots, 20\}$.

49. (d) $D(\rho) = \{a \in \mathbb{N} : b \in \mathbb{N}$ এবং $b = 7 - 2a\}$
$= \{1, 2, 3\} \neq \mathbb{N} \Rightarrow \rho$ সম্বন্ধটি $\mathbb{N}$-এর ওপর অপেক্ষক নয়।

এখন, $(1, 5) \in \rho$ কিন্তু $(5, 1) \notin \rho$ এবং $(1, 1) \notin \rho$. সুতরাং ρ সম্বন্ধটি প্রতিসম বা স্বসম, কোনোটিই নয়।

50. (c) $D(\rho) = \{1, 2, 3, \ldots, 19\} \neq \mathbb{N}$, সুতরাং ρ সম্বন্ধটি $\mathbb{N}$-এর ওপর অপেক্ষক নয়। স্পষ্টতই $(1, 1) \notin \rho$, অর্থাৎ ρ স্বসম নয়। যেহেতু $(x, y) \in \rho \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y + x = 20 \Rightarrow (y, x) \in \rho$, ρ সম্বন্ধটি প্রতিসম।

এখানে $(2, 18), (18, 2) \in \rho$ কিন্তু $(2, 2) \notin \rho$, অতএব ρ সম্বন্ধটি সংক্রমণশীল নয়।

51. (c) এখানে $\rho = \{(-2, 6)\ (-1, 5)\ (0, 4)\ (1, 3)\ (2, 2)\}$. ρ-এর প্রসার $= \{6, 5, 4, 3, 2\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

52. (c) $\rho = \{(x + 3, 2x - 1) : x \in \mathbb{N}$ এবং $1 \leq x \leq \sqrt{31}\}$
$= \{(4, 1), (5, 3), (6, 5), (7, 7), (8, 9)\}$.

সুতরাং $\rho^{-1} = \{(1, 4), (3, 5), (5, 6), (7, 7), (9, 8)\}$.

53. **(c)** ধরি A = {1, 2, 3, 4}, $\rho_1 = \{(1, 2), (1, 1)\}$ $\rho_2 = \{(2, 1), (2, 2)\}$; তাহলে ρ_1 এবং ρ_2 প্রতিসম নয় কিন্তু $\rho_1 \cup \rho_2$ প্রতিসম।

ধরি $\rho_1 = \{(1, 2)\ (3, 4)\}$ এবং $\rho_2 = \{(4, 3)\}$, তাহলে $\rho_1 \cup \rho_2 = \{(1, 2), (3, 4), (4, 3)\}$ যা সংক্রমণশীল নয়, কারণ $(3, 4), (4, 3) \in \rho_1 \cup \rho_2$, কিন্তু $(3, 3) \notin \rho_1 \cup \rho_2$ [লক্ষ কর, এখানে ρ_1 এবং ρ_2 সংক্রমণশীল।].

ধরা যাক ρ_1 এবং ρ_2 সংক্রমণশীল। এখন $(a, b), (b, c) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow (a, b), (b, c) \in \rho_1$ এবং $(a, b), (b, c) \in \rho_2 \Rightarrow (a, c) \in \rho_1$ এবং $(a, c) \in \rho_2$

$\Rightarrow (a, c) \in \rho_1 \cap \rho_2$. সুতরাং (c) সত্য।

$(a, a) \in \rho_1$ এবং $(a, a) \in \rho_2$, প্রতিটি $a \in$ A-এর জন্যে (ρ_1 এবং ρ_2 স্বসম হলে)।

সুতরাং $(a, a) \in \rho_1 \cap \rho_2$, যখনই $a \in$ A.

সুতরাং $\rho_1 \cap \rho_2$ স্বসম এবং তাই (d) সত্য নয়।

54. **(b)** এখানে $(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho^{-1} \Rightarrow (y, x) \in \rho\ [\because \rho = \rho^{-1}]$

$\Rightarrow \rho$ প্রতিসম।

ধরি A = {1, 2, 3} এবং $\rho = \{(2, 3), (3, 2)\}$, তাহলে $\rho = \rho^{-1}$, কিন্তু ρ সম্বন্ধটি স্বসম বা সংক্রমণশল নয়।

55. **(d)** যেহেতু প্রত্যেক $a \in \mathbb{Z}$-এর জন্যে, $a - a = 0$ যা 12 দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং ρ স্বসম।

এখন, $(a, b), (b, c) \in \rho \Rightarrow a - b = 12k_1$ এবং $b - c = 12k_2$, যেখানে $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) = 12(k_1 + k_2) \Rightarrow a\ \rho\ c$, অর্থাৎ ρ সংক্রমণশীল।

আবার, $a\ \rho\ b \Rightarrow a - b = 12k_1$, যেখানে $k_1 \in$ Z

$\Rightarrow b - a = 12(-k_1)$, যেখানে $-k_1 \in$ Z $\Rightarrow b\ \rho\ a$. সুতরাং ρ প্রতিসম।

56. **(a)** ধরি $a \in$ A. তাহলে $(a, a) \in \rho_1$ এবং $(a, a) \in \rho_2$ এবং তাই $(a, a) \in \rho_1 \cap \rho_2$, যার ফলে $\rho_1 \cap \rho_2$ স্বসম হচ্ছে।

এখন $a, b \in$ A, $(a, \text{b}) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow (a, b) \in \rho_1$ এবং $(a, b) \in \rho_2$

$\Rightarrow (b, a) \in \rho_1$ এবং $(b, a) \in \rho_2$

$\Rightarrow (b, a) \in \rho_1 \cap \rho_2$. সুতরাং $\rho_1 \cap \rho_2$ প্রতিসম।

$a, b, c \in$ A এবং $(a, b), (b, c) \in \rho_1 \cap \rho_2 \Rightarrow (a, b), (b, c) \in \rho_1$ এবং $(a, b), (b, c) \in \rho_2$

$\Rightarrow (a, c) \in \rho_1$ এবং $(a, c) \in \rho_2$ (যেহেতু ρ_1 এবং ρ_2 সংক্রমণশীল সম্বন্ধ)

$\Rightarrow (a, c) \in \rho_1 \cap \rho_2$. সুতরাং $\rho_1 \cap \rho_2$ সংক্রমণশীল।

57. **(d)** এখানে $(x, y)\ \rho\ (x, y) \Leftrightarrow x + y = y + x$ যা সহজেই সত্য বলে দেখা যাচ্ছে।

সুতরাং ρ স্বসম।

এখন $(x, y)\ \rho\ (p, q) \Rightarrow x + q = y + p \Rightarrow p + y = q + x \Rightarrow (p, q)\ \rho(x, y)$.

সুতরাং ρ প্রতিসম।

আবার, $(x_1, y_1)\ \rho(x_2, y_2)$, $(x_2, y_2)\ \rho(x_3, y_3)$

$\Rightarrow x_1 + y_2 = y_1 + x_2$ এবং $x_2 + y_3 = y_2 + x_3$

$\Rightarrow x_1 + y_2 + x_2 + y_3 = y_1 + x_2 + y_2 + x_3$

$\Rightarrow x_1 + y_3 = y_1 + x_3 \Rightarrow (x_1, y_1)\ \rho(x_3, y_3)$. সুতরাং ρ সংক্রমণশীল।

58. **(c)** স্পষ্টতই $\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\ (2, 1)\ (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$.

59. **(c)** ধরি $(x, y) \in (\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \rho_1 \cap \rho_2$

$\Leftrightarrow (y, x) \in \rho_1$ এবং $(y, x) \in \rho_2$

$\Leftrightarrow (x, y) \in \rho_1^{-1}$ এবং $(x, y) \in \rho_2^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_1^{-1} \cap \rho_2^{-1}$.

60. **(c)** $a\ \rho\ b\ (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow ba > 0 \Rightarrow b\ \rho\ a$. অতএব ρ প্রতিসম।

$a, b, c \in \mathbb{R}$, $a\ \rho\ b$ এবং $b\ \rho\ c \Rightarrow ab > 0$ এবং $bc > 0 \Rightarrow ab^2c > 0 \Rightarrow ac > 0$ $(\because b^2 > 0) \Rightarrow a\ \rho\ c$. সুতরাং ρ সংক্রমণশীল।

কিন্তু $0 \not\rho\ 0 \Rightarrow \rho$ স্বসম নয়।

61. **(b)** (a)-এর জন্যে, $(2 - 2) = 0 \Rightarrow 2 \not\rho\ 2 \Rightarrow \rho$ স্বসম নয়।

(b)-এর জন্যে, $a - a = 0$, যখনই $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a, a) \in \rho$, যখনই $a \in \mathbb{Z}$. সুতরাং ρ স্বসম।

$a, b \in \mathbb{Z}$ এবং $a\ \rho\ b \Rightarrow (a - b)$ জোড় পূর্ণসংখ্যা $\Rightarrow (b - a)$ জোড় পূর্ণসংখ্যা $\Rightarrow b\ \rho\ a$. সুতরাং ρ প্রতিসম।

আবার, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, এবং $a\ \rho\ b$ এবং $b\ \rho\ c \Rightarrow a - b = 2m$ এবং $b - c = 2n$, যেখানে m, n দুটি অখণ্ড সংখ্যা $\Rightarrow a - c = 2(m + n) \Rightarrow a\ \rho\ c$. সুতরাং ρ সংক্রমণশীল; অর্থাৎ ρ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

62. **(d)** $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x.x = x^2$, যেখানে $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x, x) \in \rho$. সুতরাং ρ স্বসম।

$x, y \in \mathbb{N}$ এবং $(x, y) \in \rho \Rightarrow xy = n^2$, কোনো $n \in \mathbb{N}$-এর জন্যে $\Rightarrow yx = n^2 \Rightarrow (y, x) \in \rho$. সুতরাং ρ প্রতিসম।

$x, y, z \in \mathbb{N}$, $x\ \rho\ y$ এবং $y\ \rho\ z \Rightarrow xy = m^2$ এবং $yz = n^2$, যেখানে $m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x\,y^2\,z = m^2n^2 \Rightarrow xz = \left(\dfrac{mn}{y}\right)^2$, যেখানে $\dfrac{mn}{y} \in \mathbb{N}$ (যেহেতু $x\,z \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow x\ \rho\ z$.

সুতরাং ρ সংক্রমণশীল। অতএব ρ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

63. **(b)** স্পষ্টতই ρ_3 স্বসম। এটির প্রতিসম ও সংক্রমণশীল হওয়ার শর্তদুটিও স্বাভাবিক ভাবেই সিদ্ধ হচ্ছে।

64. **(a)** $a \in \mathbb{R}$ হলে, $1 + aa > 0 \Rightarrow (a, a) \in \rho$, যখনই $a \in \mathbb{R}$. সুতরাং ρ সম্বন্ধটি স্বসম।

$a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \rho \Rightarrow 1 + ab > 0 \Rightarrow 1 + ba > 0 \Rightarrow (b, a) \in \rho$. অতএব ρ প্রতিসম।

এখন, $1, -\dfrac{1}{2}, -2 \in \mathbb{R}$ যেখানে $1 + 1\left(-\dfrac{1}{2}\right) > 0$, $1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)(-2) > 0$ এবং

$1 + 1(-2) \not> 0$, অর্থাৎ $\left(1, -\frac{1}{2}\right) \in \rho$, $\left(-\frac{1}{2}, -2\right) \in \rho$ কিন্তু $(1, -2) \notin \rho$. সুতরাং ρ সংক্রমণশীল নয়।

65. (b) যে কোনো $x \in$ B-এর জন্যে, $(x - x)$ সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য ($\mathbb{Z}$-এ); সুতরাং θ স্বসম। যেকোনো $x, y \in$ B-এর জন্যে, যখনই $x - y$ সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে তখনই $y - x$ সংখ্যাটিও 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে। সুতরাং θ প্রতিসম। $x, y, z \in$ B এবং $(x, y), (y, z) \in \theta$ হলে, $x - y = 3m$ এবং $y - z = 3n$ হবে, কোনো $m, n \in \mathbb{Z}$-এর জন্য; তখন $x - z = 3(m + n)$ এবং তাই $(x, z) \in \theta$. সুতরাং θ সংক্রমণশীল এবং তাই সমতুল্যতা হবে। একইভাবে ρ সম্বন্ধটি A-এর ওপর সমতুল্যতা হবে অর্থাৎ (b) সঠিক।

66. (d) $(1, 1) \notin \rho \Rightarrow \rho$ স্বসম নয়।

$(1, 0) \in \rho$ এবং $(0, 1) \in \rho$, কিন্তু $(1, 1) \notin \rho \Rightarrow \rho$ সংক্রমণশীল নয়।

ρ সহজেই প্রতিসম হচ্ছে; সুতরাং (d) সঠিক।

67. (d) $(a, b) \in A \Rightarrow ab = ba \Rightarrow (a, b)\ \rho\ (a, b) \Rightarrow \rho$ স্বসম।

$(a, b), (c, d) \in A$ এবং $(a, b)\ \rho\ (c, d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c, d)\ \rho\ (a, b)$. সুতরাং ρ প্রতিসম। আবাব $(a, b), (c, d), (e, f) \in A$ এবং $(a, b)\ \rho\ (c, d)$ এবং $(c, d)\ \rho\ (e, f) \Rightarrow ad = bc$ এবং $cf = de \Rightarrow ad = b\frac{de}{f} \Rightarrow af = be$

$\Rightarrow (a, b)\ \rho\ (e, f)$. সুতরাং ρ সংক্রমণশীল এবং যেহেতু একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

68. (d) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$-এর জন্যে, $(x, y)\ \rho\ (0, 0) \Leftrightarrow x = 0$. সুতরাং $(x, y)\ \rho\ (0, 0)$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি (x, y) বিন্দুটি y-অক্ষের ওপর থাকে।

69. (d) (a)-এর জন্যে, $x\ \rho\ y \Rightarrow |x - y| < 2 \Rightarrow |y - x| < 2 \Rightarrow y\ \rho\ x$ (যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$). সুতরাং ρ প্রতিসম এবং তাই (a) সঠিক নয়।

(b)-এর জন্যে, এখানে $(-3, 1) \in \rho$ কিন্তু $(1, -3) \notin \rho \Rightarrow \rho$ প্রতিসম নয় এবং তাই (b) সঠিক নয়।

(c)-এর জন্যে দেখা যাচ্ছে, $(-3)\ \rho\ (-5)$ এবং $(-5)\ \rho\ 4$, কিন্তু $(-3)\ \not\rho\ 4$; সুতরাং ρ সংক্রমণশীল নয় এবং তাই (c) সত্য নয়।

(d)-এর জন্যে, $-2 \not> |-2| \Rightarrow (-2, -2) \notin \rho$. সুতরাং ρ স্বসম নয়। এখন $3 > |-2|$ কিন্তু $-2 \not> |3| \Rightarrow (3, -2) \in \rho$ কিন্তু $(-2, 3) \notin \rho$; অর্থাৎ ρ প্রতিসম নয়। এখন ধরি $x, y, z \in \mathbb{R}$ যাতে $(x, y) \in \rho$ এবং $(y, z) \in \rho$. তাহলে $x > |y|$ এবং $y > |z|$, এবং তাই $x > |y| \geq y > |z|$, অর্থাৎ $(x, z) \in \rho$. সুতরাং ρ সংক্রমণশীল।

70. (b) $x, y \in \mathbb{N}$ এবং $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Rightarrow x = y$ ($\because x, y \in \mathbb{N}$). অতএব f একটি এককৈক চিত্রণ।

এখন, $3 \in \mathbb{R}$, কিন্তু এমন কোনো $x \in \mathbb{N}$ নেই যার জন্যে $f(x) = 3$ হয়, কারণ যদি হতো, তবে $x^2 + 1 = 3$ হতে হবে, যেখানে x স্বাভাবিক সংখ্যা, অর্থাৎ $x^2 = 2$-যা অসম্ভব। সুতরাং f পরিব্যাপ্ত (বা উপরিচিত্রণ) নয়।

71. **(d)** $x, y \in (0, 1)$ এবং $f(x) = f(y) \Rightarrow a + (b - a)x = a + (b - a)y \Rightarrow x = y$. সুতরাং f এককৈক। এখন ধরি $y \in (a, b)$, আমরা খুঁজছি এমন $x \in (0, 1)$ যাতে $f(x) = y$ হয়। সেইজন্যে দরকার $a + (b - a)x = y$, অর্থাৎ $x = \dfrac{y-a}{b-a}$ হওয়া।

যেহেতু $a < y < b$, আমরা পাই $\dfrac{y-a}{b-a} > 0$ এবং $\dfrac{y-a}{b-a} < \dfrac{b-a}{b-a} = 1$. সুতরাং $\dfrac{y-a}{b-a} \in (0, 1)$ যাতে $f\left(\dfrac{y-a}{b-a}\right) = y$ হয়, যখনই $y \in (a, b)$. সুতরাং f পরিব্যাপ্ত ও বটে। অতএব (d) সঠিক।

72. **(b)** ধরি প্রত্যেক $A \subseteq X$-এর জন্যে, $f^{-1} f(A) \subseteq A$. ধরা যাক, $x_1, x_2 \in X$, যেখানে $x_1 \neq x_2$.
তাহলে $f^{-1} f(\{x_1\}) \subseteq \{x_1\}$ যাতে $x_2 \notin f^{-1} f(\{x_1\})$ $(\because x_2 \neq x_1)$ হয়।
তাহলে $f(x_2) \notin f(\{x_1\})$, অর্থাৎ $f(x_1) \neq f(x_2)$ হবে। সুতরাং f এককৈক।

73. **(c)** যেকোনো $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যে, $h(x) = (gof)(x) = g(f(x))$ বা, $g(2x + 1) = 10x + 10$
$\Rightarrow g\left(2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+1\right) = 10\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 10$ বা, $g(x) = 5x + 5$.

74. **(d)** আমরা পাই $f(0) = 0 = f(-3)$ কিন্তু $0 \neq -3$ (এবং $0, -3 \in A$). সুতরাং f এককৈক নয়।

আবার $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, কিন্তু $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ যা স্পষ্টতই একটি মূলদ সংখ্যা, যখনই $x \in A$.
অর্থাৎ এমন কোনো $x \in A$ নেই যার জন্যে $f(x) = \sqrt{2}$ হয়।
অর্থাৎ f পরিব্যাপ্ত নয়।

75. **(c)** এখানে (c) সঠিক নয়। কারণ, যদি আমরা ধ্রুবক চিত্রণ $f : \mathbb{R} \to \{0\}$-এর কথা ভাবি যেখানে প্রত্যেক $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যে $f(x) = 0$, এবং ধরি $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5\}$, তাহলে $f(A \cap B) = f(\phi) = \phi$ যদিও $f(A) \cap f(B) = \{0\}$.

76. **(a)** $f(0) = 0 \Rightarrow 0$ সংখ্যাটি f-এর প্রসারে রয়েছে। এখন যেকোনো
$b > 0$-এর জন্যে $\sqrt{b} \in \mathbb{R}$ যাতে $f(\sqrt{b}) = b$ $(\because \sqrt{b} > 0)$, এবং
$b < 0$-এর জন্যে, আমরা পাই $x = \dfrac{b-3}{2} < 0$ এবং $f\left(\dfrac{b-3}{2}\right) = 2\ \dfrac{b-3}{2} + 3 = b$.

অর্থাৎ প্রতিটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যাই f-এর প্রসারে আছে। সুতরাং f-এর প্রসার হল সমগ্র $\mathbb{R}$.

77. **(d)** $x, y \in \mathbb{R}$ এবং $f(x) = f(y) \Rightarrow 2^x = 2^y \Rightarrow x = y$. সুতরাং f এককৈক।

যেকোনো $y \in (0, \infty)$-এর জন্যে, $\dfrac{\log y}{\log 2} \in \mathbb{R}$ যাতে $f\left(\dfrac{\log y}{\log 2}\right) = 2^{\log_2^y} = y$, এবং তাই f পরিব্যাপ্ত। সুতরাং f একটি এককৈক পরিব্যাপ্ত চিত্রণ।

78. **(b)** (a)-এর জন্যে আমরা দেখি যে $1 \in \mathbb{N}$ কিন্তু এমন কোনো $x \in \mathbb{N}$ নেই যাতে $f(x) = x + 2 = 1$ হয়; সুতরাং f পরিব্যাপ্ত নয়।

(b)-এর জন্যে, আমরা দেখছি যে $x, y \in \mathbb{Q}$ এবং $x \neq y \Rightarrow 3x + 7 \neq 3y + 7 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, অর্থাৎ f একৈক। আবার যেকোনো $y \in \mathbb{Q}$-এর জন্যে $\frac{y-7}{3} \in \mathbb{Q}$ যাতে $f\left(\frac{y-7}{3}\right) = y$ হয়। সুতরাং f পরিব্যাপ্ত।

79. **(d)** (a)-এর জন্যে $f(-1)$ সংজ্ঞাত নয়; (b)-এর জন্যে $f(1) \notin \mathbb{R}^+$; (c)-এর জন্যে $[\sin(e^x)] \leq 1$ সুতরাং $f(x) < 0$, যখনই $x \in Q$ এবং তাই $f(x) \notin Q^+$ যখনই $x \in Q$. এখন (d)-এর জন্যে আমরা দেখছি যে, $x \in R \setminus \{0\}$ হলেই $|x|$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং তাই $\frac{1}{|x|} \in \mathbb{R}^+$ যখনই $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. সুতরাং f (যা (d) তে রয়েছে) একটি চিত্রণ বলা চলে।

80. **(a)** (a)-এর জন্যে, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \geq 1$. আবার, যখনই $x \geq 1$, $x - 1 \geq 0$ এবং তাই $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ যাতে $f\left(\sqrt{x-1}\right) = x - 1 + 1 = x$. সুতরাং এক্ষেত্রে f-এর প্রসার $[1, \infty)$. অতএব (a) সত্য।

81. **(b)** প্রতিটি $x \in \mathbb{R}$-এর জন্যে $f(x) = 0$ বা 1, অর্থাৎ $f(x) \in \mathbb{Q}$. সুতরাং $f \circ f\ (x) = 1$, যেখানে $x \in \mathbb{R}$.

82. **(c)** ধরি $n \in \mathbb{N}$. এখন

n জোড় সংখ্যা $\Rightarrow (n - 1)$ বিজোড় এবং $f(n - 1) = n - 1 + 1$ [$\because (-1)^n = -1$ যখন n বিজোড়] $= n$;

n বিজোড় $\Rightarrow (n + 1)$ বিজোড় সংখ্যা এবং $f(n + 1) = n + 1 - 1 = n$.

$$\text{অতএব, } f^{-1}(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{যখন } n \text{ জোড় সংখ্যা} \\ n + 1, & \text{যখন } n \text{ বিজোড় সংখ্যা} \end{cases}$$

সুতরাং (c) সঠিক।

83. **(b)** এখানে (a) অবশ্যই সঠিক নয়। কারণ $f = \{(1, 2), (1, 3)\}$, যদিও A-এর ওপর একটি সম্বন্ধ হচ্ছে, এটি কখনোই A থেকে A তে চিত্রণ হবে না কারণ f-এর মাধ্যমে 1 সংখ্যার প্রতিবিম্ব (image) অনন্য হচ্ছে না; আরও লক্ষ্য কর $f(2)$ বা $f(3)$ আদৌ সংজ্ঞাতই নয়। (b) সত্য, কারণ একথা সাধারণভাবে প্রমাণ করা যায় যে, কোনো সসীম সেট থেকে সেই সেটের উপর কোনো চিত্রণ যদি একৈক হয় তবে তা পরিব্যাপ্ত হবেই এবং এই বক্তব্য উল্টোমুখেও সঠিক। এই বিশেষ ক্ষেত্রে, যদি $f : A \to A$ তে পরিব্যাপ্ত হয় যা একৈক নয়, তাহলে সেক্ষেত্রে অন্তত দুটি উপাদান $a, b \in A$ থাকবে যাতে $a \neq b$ হওয়া সত্ত্বেও $f(a) = f(b)$ হচ্ছে। এখন A-এর চারটি বিভিন্ন উপাদানের সর্বাধিক চারটি বিভিন্ন প্রতিবিম্ব হতে পারে। তাহলে উপরের শর্তে f-এর প্রসার হিসেবে সর্বাধিক 5টি বিভিন্ন উপাদান থাকতে পারবে এবং সেক্ষেত্রে f চিত্রণটি আর উপরিচিত্রণ (বা পরিব্যাপ্ত) থাকবে না — যা স্ববিরোধী।

84. **(c)** $b \in B$ এবং f পরিব্যাপ্ত $\Rightarrow$ এমন $a \in A$ রয়েছে যে $f(a) = b$ হবে $\Rightarrow g(b) = g(f(a))$

$= h\ (f(a)) = h(b)$. সুতরাং $g = h$. এখানে (b) (এবং তাই (a) ও (d)) সত্য হতে পারে না। কারণ, ধর $A = \{a, b, c\}$, $B = C = \{a, b, c, d\}$, $f : A \to B$ এবং $g, h : B \to C$ যাতে $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$; $g(a) = h(a) = a$, $g(b) = h(b) = b$, $g(c) = f(c) = c$ এবং $g(d) = d$, $h(d) = b$. তাহলে $g \circ f\ = h \circ f$, f একৈক কিন্তু $g \neq h$.

85. **(d)** দেখা যাচ্ছে $f(2) = f(-2) = 4$, অর্থাৎ f একৈক নয়। অনুরূপে $g(2) = g(-2) = 2$, যা বলছে যে g একৈক নয়।

h-এর ক্ষেত্রে $h(x_1) = h(x_2)$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. অর্থাৎ h একৈক, যদিও f বা g তা নয়।

এখন, যেকোনো $x \in \mathbb{Z}$-এর জন্যে, $(fh)(x) = f(h(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$,

এবং $(hf)(x) = h(f(x)) = h(x^2) = x^2 + 1$. অতএব $(fh)(1) = (1 + 1)^2 = 4$,

যেখানে $(hf)\ (1) = 1^2 + 1 = 2$. সুতরাং $fh \neq hf$.

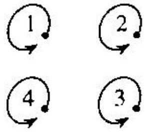
86. **(d)** স্পষ্টতই যেকোনো শব্দ x-এর জন্যে $x\ Rx$ হবে, কারণ x-এর প্রতিটি অক্ষরই x-এ উপস্থিত $\Rightarrow$ R সম্বন্ধটি স্বসম।

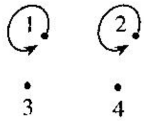
ধরি, $x\ Ry$; তাহলে x এবং y শব্দ দুটির অন্তত একটি সাধারণ অক্ষর রয়েছে

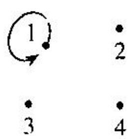
$\Rightarrow y$ এবং x শব্দ দুটির অন্তত একটি সাধারণ অক্ষর আছে

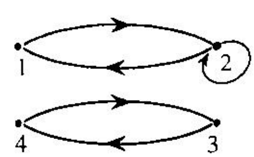
$\Rightarrow y\ Rx \Rightarrow$ R সম্বন্ধটি প্রতিসম

এবার, able, ass এবং son শব্দগুলি নেওয়া যাক। প্রদত্ত সংজ্ঞা অনুসারে, (able) R (ass), এবং (ass) R (son) কিন্তু লক্ষ কর যে (able) R (son) অর্থাৎ, R সম্বন্ধটি সংক্রমণশীল নয়।

87. **(c)** 

88. **(b)** 

89. **(d)** 

90. **(b)** 

[আমরা মূল অধ্যায়ের শেষে যে তত্ত্ব আলোচনা করেছি তার সাপেক্ষে উপরের চিত্রগুলির তাৎপর্য সহজেই বোঝা যাচ্ছে।]

অপেক্ষকের সীমা ও সন্ততা
(Limit and Continuity of a Function)

কিছু গুরুত্বপূর্ণ সূত্র

সংজ্ঞা ঃ a বিন্দুকে ঘিরে গঠিত কোনো মুক্ত অন্তরালে সংজ্ঞাত কোনো অপেক্ষক f (**f অপেক্ষকটি a বিন্দুতে সংজ্ঞাত নাও হতে পারে**) এবং বাস্তব সংখ্যা l-এর পরিপ্রেক্ষিতে,

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

[পড়ো, x-ক্রমশ a-এর দিকে এগিয়ে গেলে $f(x)$-এর সীমাস্থ মান হয় l] সংকেতচিহ্ন বোঝায় যে, যখন x চলরাশির মান a-এর যথেষ্ট কাছাকাছি হবে $(x \neq a)$, $f(x)$-এর মান, l-এর যত খুশি কাছে নিয়ে যাওয়া যাবে।

মন্তব্য ঃ A. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ B. $\lim\limits_{x\to a} x = a$ C. $\lim\limits_{x\to c} x^n = c^n$ (যখন n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

সূত্র ঃ

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ হবে, যদি এবং শুধুমাত্র যদি $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = l = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ হয়।

(ii) কোনো অপেক্ষকের সীমার অস্তিত্ব থাকবেই তা নাও হতে পারে, যেমন, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$-এর অস্তিত্ব নেই।

(iii) ধরা যাক, a একটি বাস্তব সংখ্যা এবং a-কে ঘিরে কোনো মুক্ত অন্তরালে $f(x)$ ও $g(x)$ দুটি এমন অপেক্ষক সংজ্ঞাত যে, a বাদে x-এর প্রতিটি গ্রহণযোগ্য মানেই $f(x) = g(x)$ হয়। এখন, যদি $x \to a$ হলে $g(x)$-এর সীমার অস্তিত্ব থাকে, তাহলে এক্ষেত্রে $f(x)$-এর সীমা-এর অস্তিত্বও থাকবে এবং তাদের সীমাস্থ মানদুটি সমান হবে; অর্থাৎ, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ হবে।

(iv) x চলরাশির অধীনে $p(x)$ একটি বহুপদরাশি অপেক্ষক এবং a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$ হবে।

সীমার বীজগণিত

ধরা যাক, a ও c বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা; আরও মনে করি যে $f(x)$ এবং $g(x)$ এমন দুটি অপেক্ষক যে

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে।

তাহলে নীচের তালিকায় প্রকাশিত সূত্রগুলি সত্য ঃ

(i) $\lim\limits_{x\to a} [c\, f(x)] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$.

(iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, যদি $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ হয়।

(v) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$.

(vi) $\lim\limits_{x\to a} | f(x) | = | \lim\limits_{x\to a} f(x) |$.

[যদিও $\lim\limits_{x\to a} | f(x) |$ -এর অস্তিত্ব আছে মানেই যে $\lim\limits_{x\to a} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকবেই — এমনটি নয়।]

(vii) $\lim\limits_{x\to a} \log(f(x)) = \log\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$, যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ হয়।

(viii) $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

(ix) $a > 0$ এবং n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে (অথবা, $a \leq 0$ এবং n যেকোনো বিজোড় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে)

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \text{ হয়।}$$

আরও সাধারণভাবে বললে,

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ [n জোড় সংখ্যা হলে, $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ ধরে নিয়ে]।

(x) $f(x)$ এবং $g(x)$ যদি এমন অপেক্ষক হয় যে,

$$\lim_{x\to a} g(x) = l \text{ এবং } \lim_{x\to l} f(x) = f(l),$$

তাহলে, $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right) = f(l)$ হবে।

(xi) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, যখন x-এর সমস্ত মানে $f(x) > 0$ হয়।

(xii) a-এর নিকটবর্তী x-এর সমস্ত মানে $f(x) \le g(x)$ হলে ($a = x$ বিন্দুতে এই অসমীকরণ সিদ্ধ না হলেও ক্ষতি নেই) এবং $x \to a$ তে $f(x)$ এবং $g(x)$ উভয়েরই সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকলে,

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x) \text{ হবে।}$$

(xiii) [স্যানডুইচ (Sandwich) উপপাদ্য] ঃ a-এর নিকটবর্তী x-এর সমস্ত মানে $f(x) \le g(x) \le h(x)$ হলে ($x = a$ বিন্দুতে f, g ও h-এর মধ্যে এই সম্বন্ধটি সিদ্ধ না হলেও চলবে) এবং যদি

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \text{ হয়, তবে } \lim_{x\to a} g(x) = l \text{ হবে।}$$

কয়েকটি আদর্শ সীমা (Some standard limits) ঃ

A. $a \ne 0$ এবং n ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ হবে;

(আগেই বলেছি যে, n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ হয়)

B. n যেকোনো মূলদ সংখ্যা হলে, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ হবে;

C. n যেকোনো মূলদ সংখ্যা হলে, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n$ হবে;

D. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, যেখানে x-এর মান বৃত্তীয় পরিমাপে অর্থাৎ রেডিয়ানে মাপা হয়েছে;

E. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

F. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \log_e(1+x) = 1$;

G. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, যেখানে e হল স্বাভাবিক লগারিদ্‌ম্‌-এর নিধান;

H. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a$, $(a > 0)$.

আরও কয়েকটি বহু ব্যবহৃত সীমা ঃ

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$. (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x} = \dfrac{\pi}{180^\circ}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$, যেখানে x রেডিয়ানে মাপা হয়েছে। (v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_e x}{x^m} = 0$ $(m > 0)$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1, \text{ যদি } a = 1 \\ 0, \text{ যদি } -1 < a < 1 \\ \text{অন্যথায় অস্তিত্ব নেই।} \end{cases}$

(vi) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}}{x} = 1.$

(vii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$ ($x = a + h$ ধরে).

(viii) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log_e\left(\frac{a}{b}\right)$ $(a, b > 0)$.

(ix) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

(x) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, $p > 0$ হলে।

অনির্ণেয় আকার এবং লোপিতালের সূত্র (*L'Ĥospital's rule*) ঃ

যদি কোনো অপেক্ষক $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, 0°, ∞°, 1^∞,

ইত্যাদি আকার গ্রহণ করে তখন $f(x)$-কে $x = a$ বিন্দুতে অনির্ণেয় (indeterminate) বলা হয়। এখানে আমরা মূলত প্রথম দুটি আকার নিয়ে আলোচনা করব।

(i) $(\frac{0}{0})$ আকারের ক্ষেত্রে, যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ হয়, তাহলে

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ হবে, (যদি ডানপক্ষের সীমার অস্তিত্ব থাকে)।

(ii) $(\frac{\infty}{\infty})$ আকরের ক্ষেত্রে, যদি $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ এবং $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ হয়, তাহলে

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ হবে (যদি ডানপক্ষের সীমার অস্তিত্ব থাকে)।

মন্তব্য ঃ কোনো অঙ্কের ক্ষেত্রে এমন হতেই পারে যে উপরে বলা সূত্রটি (যা L'Hospital's rule নামে পরিচিত) একবার প্রয়োগ করার পরেও অঙ্কটির সমাধান হল না এবং আবারও $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকারেই ফেরত এলো। সেক্ষেত্রে ঐ সূত্র আবার প্রয়োগ করতে হবে।

কোনো সীমা নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যায় এই সূত্রটি খুবই কাজে লাগে (যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে তবেই); তবে অন্ধভাবে প্রয়োগ না করে, সূত্রটি প্রয়োগের আগে নীচে বিষয়গুলি সম্বন্ধে সতর্কতা অবলম্বন করা জরুরী ঃ—

(i) যে ধাপে সূত্রটি প্রয়োগ করা হবে সেই ধাপে রাশিমালার আকার $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ ইত্যাদি হতে হবে, অন্যথায় প্রয়োজনীয় সমতুল্য রাশিমালার পরিবর্তন করে নিতে হবে যাতে এই অনির্ণেয় আকারগুলির একটি পাওয়া যায় এবং তার পরেই এই সূত্রটি প্রয়োগ করা যাবে। সূত্রটির প্রয়োগ করতে গিয়ে লব এবং হর-এর রাশিমালাকে আলাদাভাবে অন্তরকলন করতে হবে। নীচে একটি এই ধরণের **ভুলকে তুলে ধরা হল**।

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 3x}{2x-\sin 3x} \quad (\tfrac{\infty}{\infty} \text{ আকার}).$$

L'Hospital's সূত্র অনুযায়ী, প্রদত্ত সীমার মান $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+3\cos 3x}{2-3\cos 3x}$.

এখন যেহেতু $\lim\limits_{x\to\infty}\cos 3x$ অসংজ্ঞাত, তাই এভাবে আমরা আর অগ্রসর হতে পারবো না। তবে লক্ষ্য করে দেখ যে অঙ্কটিকে আমরা নীচের মতন করে করতেই পারি ঃ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 3x}{2x-\sin 3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}{2-3\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)} = \frac{2+3(0)}{2-3(0)} \ (\text{যেহেতু } \lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{3x}=0) = 1.$$

উদাহরণ ঃ (i) মান নির্ণয় কর : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$.

এখন, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3}{e^x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{e^x}$ $=$ ($\frac{\infty}{\infty}$ আকার)

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{24x}{e^x}$ ($\frac{\infty}{\infty}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{24}{e^x} = 0.$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ ($\frac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1} =, e^0 = 1.$

অপেক্ষকের সন্ততা ঃ

সংজ্ঞা ঃ (i) a বিন্দুকে ঘিরে কোনো মুক্ত অন্তরালে সংজ্ঞাত $f(x)$ অপেক্ষকটি **a বিন্দুতে সন্তত** হবে যদি,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ হয়; অর্থাৎ, যদি } \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a) \text{ হয়।}$$

(ii) মুক্ত অন্তরাল (a, b)-এর প্রতিটি বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হলে তাকে (a, b) অন্তরালে সন্তত বলা হয়।

(iii) $f(x)$ অপেক্ষককে **$[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত** বলা হবে, যদি $f(x)$ অপেক্ষক (a, b) মুক্ত অন্তরালে সন্তত হয় এবং তাছাড়াও $f(x)$ অপেক্ষকটি a বিন্দুতে ডানদিক থেকে সন্তত ও b বিন্দুতে বাঁদিক থেকে সন্তত হয়। অর্থাৎ, যদি,

$f(x)$ অপেক্ষক (a, b) মুক্ত অন্তরালে সন্তত ও $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ এবং $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = f(b)$ হয়।

টীকা ঃ নীচের তালিকার যেকোনো একটি (বা একাধিক) কারণেই কোনো অপেক্ষক $f(x)$ কোনো **বিন্দু a-তে অসন্তত** হয়ে পড়বে ঃ

(i) $f(x)$ অপেক্ষকের মান $x = a$-তে সংজ্ঞাত নয়;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$-এর (সসীম) অস্তিত্ব নেই অর্থাৎ, $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$-এর (সসীম) অস্তিত্ব আছে, কিন্তু $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

অসন্ততার ধরণ ঃ

(i) যদি $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে কিন্তু তার মান $f(a)$-এর সমান না হয় অথবা যদি $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে কিন্তু তার মান $f(a)$-এর সমান না হয় তখন $f(x)$ অপেক্ষকটির $x = a$ বিন্দুতে **অপসারণযোগ্য অসন্ততা** আছে বলা হয়। এই ক্ষেত্রে $x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের মান নতুনভাবে সংজ্ঞায়িত করে অপেক্ষক $f(x)$-কে $x = a$ বিন্দুতে সন্তত করে তোলা যায়।

(ii) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, হলে বলা হয় যে অপেক্ষক $f(x)$-এর $x = a$ বিন্দুতে **অপসারণ অযোগ্য** বা **অন্তর্গূঢ় অসন্ততা** রয়েছে।

টীকা ঃ (ii) নং ক্ষেত্রে $\left|\lim\limits_{x \to a+} f(x) - \lim\limits_{x \to a-} f(x)\right|$-কে $x = a$ বিন্দুতে অপেক্ষক $f(x)$-এর **উল্লম্বনের দৈর্ঘ্য** (height of jump) বলা হয়।

সন্ততার ধর্ম ঃ

➲ **1.** বাস্তব অপেক্ষক $f(x)$ ও $g(x)$ উভয়েই a বিন্দুতে সন্তত হলে এবং c যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে নীচের প্রতিটি অপেক্ষকই a-বিন্দুতে সন্তত ঃ

(a) $f \pm g$; যেখানে $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(b) cf ; যেখানে $(cf)(x) = c\,f(x)$

(c) fg ; যেখানে $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

(d) $\dfrac{f}{g}$, যদি $g(a) \neq 0$ হয় ; যেখানে $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$;

(e) $|f|$; যেখানে $(|f|)(x) = |f(x)|$ (যদিও a বিন্দুতে $|f|$-এর সন্ততা থেকে f অপেক্ষকটি a বিন্দুতে সন্তত কিনা তা বলা যায় না)।

➲ **2.** যদি $g(x)$ অপেক্ষকটি $x = a$ বিন্দুতে সন্তত হয় এবং $f(x)$ অপেক্ষকটি $g(a)$ বিন্দুতে সন্তত হয়,

তাহলে g ও f-এর সংযোগে উৎপন্ন অপেক্ষক $(f \circ g)(x)$ [যেখানে $(f \circ g)(x) = f(g(x))$] a বিন্দুতে সন্তত হবে।

➲ **3.** যেকোনো বহুপদরাশি অপেক্ষক (polynomial function) সমগ্র $\mathbb{R}$-এর ওপর সন্তত।

➲ **4.** যদি f অপেক্ষকটি c বিন্দুতে সন্তত হয় এবং যদি $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ হয়, তবে, $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(c)$ হবে (এই ঘটনাটি অনেক সময় এইভাবে বিবৃত হয় ঃ **'সন্তত অপেক্ষকের সীমাস্থ মান, ঐ সীমাস্থ মানের অপেক্ষক হয়, যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে'**)।

➲ **5.** সব প্রাথমিক অপেক্ষক (elementary function) তার সংজ্ঞার অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে সন্তত।

➲ **6.** (a) ধরা যাক, $f(x)$ অপেক্ষক $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত ও সন্তত এবং M এমন একটি বাস্তব সংখ্যা যে $f(a) < M < f(b)$ হয়। এক্ষেত্রে মুক্ত অন্তরাল (a, b)-তে এমন একটি বাস্তব সংখ্যা c-এর অস্তিত্ব থাকবে যে $f(c) = M$ হয়।

(b) যদি $f(x)$ অপেক্ষক I অন্তরালে সন্তত হয় এবং যদি x_1, x_2 ঐ অন্তরালের এমন দুটি বিন্দু হয় যে $f(x_1)$ ও $f(x_2)$-এর চিহ্ন পরস্পর বিপরীত, তাহলে এমন একটি বিন্দু x_3 ঐ অন্তরাল I-তে থাকবে যে $x_1 < x_3 < x_2$ হবে এবং $f(x_3) = 0$ হবে।

➲ **7.** যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত ও সন্তত হয় তবে ঐ অপেক্ষকটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সীমাবদ্ধ (bounded on $[a, b]$) হবে; অর্থাৎ, $[a, b]$ অন্তরালের প্রতিটি x-এর জন্যে, $m \le f(x) \le M$ বলা যায় এমন বাস্তব সংখ্যা m ও M-এর অস্তিত্ব থাকবে। আরও বলা চলে যে, এই ক্ষেত্রে $[a, b]$ অন্তরালে এমন অন্তত একটি বিন্দু থাকবে যেখানে $f(x)$-এর মান ঐ অন্তরালের সাপেক্ষে গ্রহণযোগ্য $f(x)$-এর সমস্ত মানের মধ্যে বৃহত্তম হবে এবং এমন অন্তত একটি বিন্দু থাকবে যেখানে $f(x)$-এর মান ঐ অন্তরালের সাপেক্ষে গ্রহণযোগ্য $f(x)$-এর সমস্ত মানের মধ্যে ক্ষুদ্রতম হবে।

➲ **8.** ধরা যাক, অপেক্ষক $f(x)$ কোনো বিন্দু a-কে ঘিরে কোনো অন্তরালে সংজ্ঞাত ও a বিন্দুতে সন্তত। যদি $f(a) > 0$ (বা < 0) হয়, তাহলে a-কে ঘিরে এমন একটি মুক্ত অন্তরাল থাকবেই যার প্রতিটি বিন্দুতেই $f(x)$-এর মান ধনাত্মক (যথাক্রমে ঋণাত্মক) হবে।

অনুশীলনী

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$-এর মান

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{6}$.

2. যদি $f(x) = [x]$ হয়, তবে $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$-এর মান হবে

(a) 3 (b) 2 (c) 0 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$-এর মান

(a) -1 (b) -2 (c) 1 (d) 2.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$-এর মান

(a) e (b) $\dfrac{1}{e}$ (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \tan x$-এর মান

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|1+x|-1}{x}$-এর মান

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2.

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$-এর মান

(a) 0 (b) অস্তিত্বহীন (c) 1 (d) ∞.

8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$-এর মান

(a) 1 (b) 0 (c) e (d) অনির্ণেয়।

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$-এর মান

(a) 0 (b) সসীম নয় (c) e (d) $\dfrac{1}{e}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin|x|}{x}$-এর মান

(a) 1 (b) 0 (c) অসীম (ধনাত্মক) (d) অস্তিত্বহীন।

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$-এর মান

(a) 1 (b) অস্তিত্বহীন (c) অসীম (ধনাত্মক) (d) ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x[x]}{\sin|x|}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) অস্তিত্বহীন (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

13. যদি $\{x\}$, x-এর দশমিক অংশ বোঝায়, তাহলে $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\{x\}}{\{x\}}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) অস্তিত্বহীন (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

14. $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}} \dfrac{2x-5}{|5-2x|}$-এর মান

(a) 1 (b) 0 (c) অস্তিত্বহীন (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \dfrac{\sin x-(\sin x)^{\sin x}}{1-\sin x+\log\sin x}$-এর মান

(a) 1 (b) 2 (c) অস্তিত্বহীন (d) অসীম (ধনাত্মক)।

16. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$-এর মান

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) 0.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$-এর মান

(a) x (b) 0 (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

18. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$-এর মান

(a) π (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2π (d) $\frac{2}{\pi}$.

19. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-|x|}$-এর মান

(a) $\sin 2$ (b) $2\sin 2$ (c) $-2\sin 2$ (d) 1.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{\log_e(1+4x)}$-এর মান

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin\alpha x}-3^{\sin\beta x}}{x}$-এর মান

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $2\alpha+3\beta$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{2}{3^x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{2^x}\right)}$-এর মান

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) 0 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|\cos x + \sin x|}{x^2}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

24. যদি $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{px+q}{qx+p} = a$ এবং $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{px+q}{qx+p} = b$ হয়, যেখানে $p, q \neq 0$, তাহলে ab-এর মান

(a) 1 (b) $\frac{p}{q}$ (c) $\frac{p^2}{q^2}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$-এর মান

(a) 1 (b) 0 (c) অস্তিত্বহীন (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

26. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1.

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1}$-এর মান

(a) 1 (b) $\frac{p}{q}$ (c) $\frac{q}{p}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

28. $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$-এর মান

(a) অনির্ণেয় (b) অসীম (c) $\frac{1}{a}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

29. $\lim\limits_{y\to\infty} y \log_e\left(\dfrac{\sin\left(x+\frac{1}{y}\right)}{\sin x}\right)$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\cos x$ (d) $\cot x$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+4x)}{x^3-5x^2+2x}$-এর মান

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $-\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{12}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\log(1+x)}{\sin x}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}$.

33. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\log x}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+1}\right)^{x+4}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) e^3 (d) e^5.

35. যদি f একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হয় এবং যদি $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$-এর অস্তিত্ব সসীম হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$-এর মান

(a) অবশ্যই 0 (b) অবশ্যই -1

(c) নির্ণয় করা সম্ভব নয় (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

36. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{x}}$-এর মান

(a) e (b) e^2 (c) e^3 (d) e^5.

37. $\{x\}$ হল x-এর দশমিক অংশ, তাহলে $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin\{x\}}{\{\sqrt{x}\}}$-এর মান

(a) 1 (b) 0 (c) অস্তিত্বহীন (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\right)$-এর মান

(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\log(1+x)}{x^2}$-এর মান

(a) $\dfrac{3}{2}$ (b) $\dfrac{1}{2}$ (c) 0 (d) 1.

40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\cos x}{x^2}$-এর মান

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) 1 (c) -1 (d) $-\dfrac{1}{2}$.

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+2}$-এর মান

(a) e^2 (b) e (c) $\dfrac{1}{e^2}$ (d) $\dfrac{1}{e}$.

42. $\lim\limits_{n\to\infty}(0.2)^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots n \text{ সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\right)}$-এর মান

(a) 2 (b) 4 (c) অস্তিত্বহীন (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{a}{n}\right)^n$-এর মান

(a) a (b) $\dfrac{a}{2}$ (c) e^{2a} (d) e^a.

44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x+x^2)-e^x}{x^2}$-এর মান

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) $\dfrac{1}{4}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{4^x-2^x}$-এর মান

(a) $\dfrac{3}{4}$ (b) $\dfrac{2}{3}$ (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

46. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{\left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)^2}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$-এর মান

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{16}$.

48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$ $(a, b, c, d > 0)$-এর মান

(a) $\frac{a}{b}$ (b) $\frac{c}{d}$ (c) $\frac{\log(a/b)}{\log(c/d)}$ (d) $\frac{\log(c/d)}{\log(a/b)}$.

49. $\lim\limits_{x\to\infty} x \cos\left(\dfrac{\pi}{4x}\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{4x}\right)$-এর মান

(a) $\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$.

50. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2+1}{4x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{1+x}}$-এর মান

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

51. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ $(x \neq 0)$ যদি $x = 0$-তে সন্তত হয়, তবে $f(0)$-এর মান অবশ্যই

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3.

52. $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{3x}}$, যখন $x \neq 0$

$= k$, যখন $x = 0$

যদি $x = 0$-তে সন্তত হয়, তবে k-এর মান

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $e^{\frac{3}{2}}$ (d) $e^{\frac{2}{3}}$.

53. $f(x) = \dfrac{\log(1+ax) - \log(1-bx)}{x}$ যদি $x = 0$-তে সন্তত হয়, তবে $f(0)$-এর মান

(a) $a + b$ (b) $a - b$ (c) $b - a$ (d) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$.

54. $f(x) = \dfrac{1-\cos \alpha x}{x \sin x}$, $x \neq 0$

$= \frac{1}{2}$, $x = 0$

(যেখানে $\alpha \neq 0$ একটি ধ্রুবক) যদি $x = 0$-তে সন্তত হয়, তবে α-এর মান

(a) 1 (b) -1 (c) ± 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

55. $f(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$ অপেক্ষকটি $(0, 2)$ অন্তরালে সংজ্ঞাত হলে $f(x)$

(a) $x = 1$-এ সন্তত

(b) $x = 1$-এ অপেক্ষকটির অপসারণযোগ্য অসন্ততা আছে

(c) $x = 1$-এ অপেক্ষকটির উল্লম্ফন অসন্ততা আছে

(d) $x = 1$-এ সন্তত না হতেও পারে।

56. $f(x) = \dfrac{1-\cos mx}{x \sin x}$, যখন $x \neq 0$

$= 2$, যখন $x = 0$

অপেক্ষকটি $x = 0$-তে সন্তত হলে, m-এর মান

(a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ± 1 (d) ± 2.

57. $f(x) = \dfrac{e^{[x]+|x|}-2}{[x]+|x|}, x \neq 0$

$= -1$, $x = 0$ হলে,

(a) $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$-তে সন্তত (b) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -1$

(c) $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 1$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

58. $f(x) = (\sin 2x)^{\tan^2 2x}$ অপেক্ষকটি $x = \frac{\pi}{4}$-তে অসংজ্ঞাত।

$x = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে f সন্তত হবে যদি $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$-এর মান হয়

(a) e (b) $\sqrt{e}$ (c) $\frac{1}{e}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

59. ধরা যাক $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{\sin 2x}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$; যদি $x = \frac{\pi}{2}$তে $f(x)$ সন্ততঃ হয়, তবে $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$-এর মান হবে

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1.

60. ধরা যাক $f(x) = (\sin x)^{\frac{1}{\pi - 2x}}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$; যদি $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হয়, তবে $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$-এর মান হবে

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) 1.

61. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$-এর মান

(a) 2 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) অস্তিত্বহীন।

62. $a > 0$, $b \neq 0$ এবং $p \in \mathrm{N}$ হলে, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{(1+bx)^p - 1}$-এর মান

(a) $\frac{p\log a}{b}$ (b) $\frac{\log a}{pb}$ (c) $\frac{b\log a}{p}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

63. $\lim_{y\to a} \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{y}}{\sin\left[\frac{\pi}{a}(2y-a)\right]}$-এর মান

(a) $\frac{1}{\pi a}$ (b) $\frac{2}{\pi a}$ (c) $\frac{1}{2\pi a}$ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

64. ধরা যাক f একটি বাস্তব মানে অপেক্ষক যা $D \subseteq R$-এ সংজ্ঞাত যেখানে $0 \in D$ এবং $x, y \in D$ হলেই $f(x + y) = f(x) + f(y)$ হয়। যদি $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত হয় তাহলে $f(x)$ অপেক্ষকটি

(a) D-এর প্রতিটি বিন্দুতে সন্তত

(b) D-এর কিছু বিন্দুতে সন্তত হলেও প্রতিবিন্দুতে সন্তত নয়

(c) 0 ছাড়া D-এর অন্য প্রতিটি বিন্দুতেই অসন্তত

(d) উপরের একটি বক্তব্যকেও সিদ্ধ করে না।

65. $n > 1$ এর জন্য $\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^n-(a-x)^n}{x}$ এর মান

(a) na^n (b) $2na^n$ (c) $2na^{n-1}$ (d) na^{n-1}.

66. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+7x+8}{x^2+2x+6}\right)^{3x}$ এর মান

(a) e^5 (b) e^9 (c) e^{15} (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

67. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ হলে, $y = f(f(f(x)))$-এর অসন্ততার বিন্দুগুলির সেটটি

(a) $\{0, 1\}$ (b) $\{1\}$ (c) ϕ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

68. $[-2, 2]$ অন্তরালে $f(x) = \frac{x^3}{4} - \sin\pi n + 5$ অপেক্ষকটি

(a) $4\frac{2}{3}$ মান নেয় (b) $-2\frac{2}{3}$ মান নেয়

(c) এমন মান x নেবেনা যে $x \in [0, 4]$ (d) সর্বদাই এমন মান x নেবে যে $x \in [-2\frac{2}{3}, 0]$.

69. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^4+a^4}\right]$-এর মান

(a) a^2 (b) $\frac{a^2}{2}$ (c) 0 (d) ∞.

70. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x+a}{\sin x}, & \text{যখন } x\neq 0\\ b, & \text{যখন } x=0\end{cases}$ অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে সন্তত হলে

(a) $a=0, =b$ (b) $a=b=1$ (c) $a=1, b=0$ (d) $a=0, b=-2$.

71. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sec x}{x^2(x+1)}$-এর মান

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

72. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^x \sin\frac{1}{2^x}$-এর মান

(a) e (b) 1 (c) ∞ (d) এগুলির কোনোটিই নয়।

73. ধরি $g(x)$ অপেক্ষকটি (0, 1) মুক্ত অন্তরালে সন্তত এবং (0, 1) মুক্ত অন্তরালে $h(x)$ এমনভাবে সংজ্ঞাত যে $h(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n f(x)+g(x)}{x^n+1}$ হয়, তাহলে

(a) $h(x)$ অপেক্ষক (0, 1) মুক্ত অন্তরালে সন্তত

(b) $h(x)$ অপেক্ষক (0, 1) মুক্ত অন্তরালে সন্তত হবেই এমন নয়

(c) $h(x)$ অপেক্ষকটির $x=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অসন্ততা আছে

(d) এগুলির কোনোটিই নয়।

উত্তর

	(a)	(b)	(c)	(d)		(a)	(b)	(c)	(d)		(a)	(b)	(c)	(d)
1.	○	○	○	●	26.	○	○	●	○	50.	●	○	○	○
2.	○	○	○	●	27.	○	○	●	○	51.	●	○	○	○
3.	○	●	○	○	28.	○	○	○	●	52.	○	○	○	●
4.	●	○	○	○	29.	○	○	○	●	53.	●	○	○	○
5.	○	○	●	○	30.	●	○	○	○	54.	○	○	●	○
6.	○	○	●	○	31.	○	○	○	●	55.	●	○	○	○
7.	●	○	○	○	32.	●	○	○	○	56.	○	○	○	●
8.	○	○	●	○	33.	○	○	●	○	57.	○	○	○	●
9.	○	○	○	●	34.	○	○	○	●	58.	○	○	○	●
10.	○	○	○	●	35.	●	○	○	○	59.	●	○	○	○
11.	○	●	○	○	36.	○	●	○	○	60.	○	○	○	●
12.	○	○	●	○	37.	○	●	○	○	61.	●	○	○	○
13.	○	●	○	○	38.	○	○	●	○	62.	○	●	○	○
14.	○	○	●	○	39.	●	○	○	○	63.	○	○	○	●
15.	○	●	○	○	40.	○	○	○	●	64.	●	○	○	○
16.	●	○	○	○	41.	○	○	●	○	65.	○	○	●	○
17.	○	○	●	○	42.	○	●	○	○	66.	○	○	●	○
18.	○	○	○	●	43.	○	○	○	●	67.	●	○	○	○
19.	○	●	○	○	44.	●	○	○	○	68.	●	○	○	○
20.	○	●	○	○	45.	○	○	○	●	69.	○	●	○	○
21.	○	○	○	●	46.	○	●	○	○	70.	○	○	○	●
22.	○	○	●	○	47.	○	○	●	○	71.	○	●	○	○
23.	●	○	○	○	48.	○	○	●	○	72.	○	●	○	○
24.	●	○	○	○	49.	○	○	○	●	73.	●	○	○	○
25.	○	●	○	○										

সংকেত/সমাধান

1. (d) প্রদত্ত $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2+9)-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$. সুতরাং ইত্যাদি।

2. (d) $\lim\limits_{x\to 3+} [x] = 3$ এবং $\lim\limits_{x\to 3-} [x] = 2$. সুতরাং ইত্যাদি।

3. (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}(\frac{0}{0}$ আকার$) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2}{-\sin x} = -2.$

4. (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}(\frac{0}{0}$ আকার$) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{1} = e^1 = e.$

5. (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cot x}(\frac{0}{0}$ আবার$) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-1}{-\operatorname{cosec}^2 x}$

$= \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2}} = 1.$

6. (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|1+x|-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1.$

7. (a) এখন $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$

$\Rightarrow 0 = \lim\limits_{x\to 0}(-x^2) \le \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \le \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ [স্যানডউইচ উপপাদ্য]

8. (c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

9. (d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = \left[\lim\limits_{y\to 0-}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-1}$ $(x = -\frac{1}{y}$ বসিয়ে$) = e^{-1}.$

10. (d) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\sin|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-\sin x}{x} = -1.$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin|x|}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin|x|}{x}$ এর অস্তিত্ব নেই।

11. (b) 10-এর অনুরূপ।

12. (c) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x[x]}{\sin|x|} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x.0}{\sin x} = 0$ এবং $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x[x]}{\sin|x|} = \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x(-1)}{-\sin x} = 1.$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[x]}{\sin|x|}$-এর অস্তিত্ব নেই।

13. (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\{x\}}{\{x\}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

14. (c) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}+}\dfrac{2x-5}{|5-2x|} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{2}+}\dfrac{2x-5}{2\left|\frac{5}{2}-x\right|} = \lim\limits_{x\to \frac{5}{2}+}\dfrac{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}{2\left(x-\frac{5}{2}\right)} = 1.$

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}-}\frac{2x-5}{|5-2x|} = \lim_{x\to \frac{5}{2}-}\frac{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}{2\left(\frac{5}{2}-x\right)} = -1.$$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{2x-5}{|5-2x|}$-এর অস্তিত্ব নেই।

15. (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+}\dfrac{\sin x - e^{\sin x\log\sin x}}{1-\sin x+\log\sin x}$ $[\frac{0}{0}$ আকার]

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\frac{\cos x - e^{\sin x\log\sin x}(\cos\log\sin x+\cos x)}{-\cos x+\cot x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\frac{1 - e^{\sin x\log\sin x}(\log\sin x+1)}{-1+\operatorname{cosec} x}. \quad [\tfrac{0}{0} \text{ আকার}]$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\frac{-e^{\sin x\log\sin x}\{\cot x+(\log\sin x+1)^2\cos x\}}{-\operatorname{cosec} x\cot x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+}\frac{-e^{\sin x\log\sin x}\{\operatorname{cosec} x+(\log\sin x+1)^2\}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{-1(1+1)}{-1} = 2.$$

16. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right]}.$

সুতরাং ইত্যাদি।

17. (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{\sin^{-1}x}$ [$\frac{0}{0}$ আকার] $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} = 1.$

18. (d) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$($\frac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}} = \dfrac{2}{\pi}.$

19. (b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-|x|} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\cos 2-\cos 2x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\sin(x+1)\sin(x-1)}{x(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\sin(x-1)}{x} = 1\ \dfrac{2\sin(-2)}{(-1)}$. সুতরাং ইত্যাদি।

20. (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\log_e(1+4x)}$($\frac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5e^{5x}}{\frac{4}{1+4x}} = \dfrac{5}{4}.$

21. (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin\alpha x}-3^{\sin\beta x}}{x}$($\frac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha.2^{\sin\alpha x}\log_e 2-\beta.3^{\sin\beta x}\log_e 3}{1}$

$= \alpha\log_e 2 - \beta\log_e 3.$

22. (c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{2}{3^x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{2^x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\dfrac{\sin\left(\frac{2}{3^x}\right)}{\left(\frac{2}{3^x}\right)}\right)\left(\dfrac{\left(\frac{3}{2^x}\right)}{\sin\left(\frac{3}{2^x}\right)}\right)\dfrac{2}{3^x}.\dfrac{2^x}{3}\right]$

$= 1.1.\ \dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{2}{3}.0 = 0$ [যেহেতু $0 < \frac{2}{3} < 1$].

23. (a) স্পষ্টতই, $|\sin x+\cos x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2} \Rightarrow 0 \le \dfrac{|\sin x+\cos x|}{x^2} \le \dfrac{\sqrt{2}}{x^2}$

$\Rightarrow 0 \le \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|\sin x+\cos x|}{x^2} \le \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|\sin x+\cos x|}{x^2} = 0.$

24. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{px+q}{qx+p} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p+\frac{q}{x}}{q+\frac{p}{xz}} = \dfrac{p}{q} = a$; অনুরূপে, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{px+q}{qx+p} = \dfrac{q}{p} = b.$

সুতরাং $ab = 1.$

25. (b) যেহেতু $-1 \le \sin x \le 1$, তাই $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}.$

$$\Rightarrow -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 0 \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

26. **(c)** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}$ ($\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{0-\sin x}{2(x-\pi)}$ ($\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}.$

27. **(c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1}$ ($\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{p}\,x^{\frac{1}{p}-1}}{\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}} = \dfrac{q}{p}.$

28. **(d)** $\lim\limits_{x\to a+}\left\{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right\} = \lim\limits_{x\to a+}\left\{\dfrac{x-a}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\sqrt{x^2-a^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+a}}\right\}$

$$= \lim_{x\to a+}\left\{\frac{\sqrt{x-a}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right\} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

29. **(d)** $y = \dfrac{1}{z}$ বসিয়ে পাই, $\lim\limits_{z\to 0+}\left[\dfrac{\log_e\left(\frac{\sin(x+z)}{\sin x}\right)}{z}\right]$ ($\dfrac{0}{0}$ আকার)

$$= \lim_{z\to 0+}\frac{\cot(x+z)}{1} = \cot x.$$

30. **(a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+4x)}{x^3-5x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2+4x)}{(x^2+4x)}.\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{x^3-5x^2+2x}.$ সুতরাং ইত্যাদি।

31. **(d)** প্রদত্ত সীমা $= \lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1-(\cos x)^{\frac{1}{3}}}{1-\cos x}-\dfrac{1-(\cos x)^{\frac{1}{2}}}{1-\cos x}\right\}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}$

$$= \left\{\frac{1}{3}.(1)^{\frac{1}{3}-1}-\frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}\right\}.\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{12}.$$

32. **(a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\log(1+x)}{\sin x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right).\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\lim\limits_{x\to 0}x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{1.1.0}{1} = 0.$

33. **(c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\log x}$ ($\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} 2x^2 = 2.$

34. **(d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+1}\right)^{x+4} = \left[\lim\limits_{\frac{1}{x+1}\to 0}\left\{1+\frac{5}{x+1}\right\}^{\frac{x+1}{5}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(x+4)}{x+1}}$

$$= e^{5\lim\limits_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = e^{5\left(\frac{1+0}{1+0}\right)} = e^5.$$

35. **(a)** $f(x)$ একটি বিজোড় অপেক্ষক হলে, $f(-x) = -f(x)$, প্রতিটি x-এর জন্য।

তাহলে $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0} f(-x) = l$ (ধরি)।

এখন, $l = -\lim\limits_{x\to 0} f(-x) = -\lim\limits_{t\to 0} f(t)$ (যখন $t = -x$) $= -l \Rightarrow 2l = 0 \Rightarrow l = 0.$

36. **(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}}{(1-\tan x)^{\frac{1}{x}}}$

$$= \frac{\left[\lim\limits_{\tan x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}}}{\left[\lim\limits_{\tan x\to 0}(1-\tan x)^{-\cot x}\right]^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}}} = \frac{e^1}{e^{-1}} = e^2.$$

37. **(b)** $x \to 0+ \Rightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow \{\sqrt{x}\} = \sqrt{x}$ এবং $\{x\} = x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\frac{\sin\{x\}}{\{\sqrt{x}\}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{x}.\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

38. **(c)** ধরি, $A = \lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\right)$; ধরি $x = 2y$.

$$\therefore A = \lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{2y}-1-2y}{4y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{(e^y-1)^2+2e^y-2-2y}{4y^2}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)^2 + \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1-y}{y^2}. \quad \therefore A = \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{2}A \textit{ i.e., } A = \frac{1}{2}.$$

39. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \log(1+x)}{x^2} (\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x}}{2x} (\dfrac{0}{0}$ আকার)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

40. (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log\cos x}{x^2} (\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x} (\dfrac{0}{0}$ আকার) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sec^2 x}{2} = -\dfrac{1}{2}.$

41. (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+2} = \lim\limits_{\frac{-2}{x+1}\to 0} \left[\left\{1+\left(-\dfrac{2}{x+1}\right)\right\}^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2(x+2)}{x+1}}$

$$= \lim_{\frac{-2}{x+1}\to 0} \left[\left\{1+\left(-\frac{2}{x+1}\right)\right\}^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-2-\frac{2}{x+1}} = e^{-2}.$$

42. (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (0.2)^{\log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots n\text{-তম পদ পর্যন্ত}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}} \frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}^{-2}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$$

43. (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{1+\sin\dfrac{a}{n}\right\}^n = \left[\lim\limits_{\sin\frac{a}{n}\to 0} \left\{1+\sin\dfrac{a}{n}\right\}^{\operatorname{cosec}\frac{a}{n}}\right]^{a \lim\limits_{\frac{a}{n}\to 0} \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}} = e^{a.1} = e^a.$

44. (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x+x^2-e^x}{x^2}$ $[\dfrac{0}{0}$ আকার]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \left\{1-\frac{1}{2}\frac{e^x-1}{x}\right\} = 1 - \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

45. (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x-2^x}{4^x-2^x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}} = \dfrac{\log 3 - \log 2}{\log 4 - \log 2} = \dfrac{\log\frac{3}{2}}{\log 2}.$

46. (b) ধরি $\tan^{-1}\sqrt{x} = \theta$ অর্থাৎ $x = \tan^2\theta$ এবং $\theta \to 0$ কারণ $x \to 0+$.

এখন নির্ণেয় সীমা $= \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2\theta}}{\theta^2} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{1-\cos 2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{\cos 2\theta}\right)}$

$$= 2\left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{\cos 2\theta}} = 2.(1)^2.\frac{1}{1+1} = 1.$$

47. (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)}{x^4} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^4\frac{x}{2}}.\dfrac{\sin^4\frac{x}{2}}{x^4}$

$$= 2\left\{\lim_{\sin^2\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}}\right\}^2 \times \left(\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4 \times \frac{1}{16} = 2.(1)^2.(1)^4.\frac{1}{16} = \frac{1}{8}.$$

48. (c) 45-এর অনুরূপ।

49. (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cos\dfrac{\pi}{4x}.\sin\dfrac{\pi}{4x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{\pi}{2x} = \dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{\frac{\pi}{2x}\to 0}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2x}}{\frac{\pi}{2x}} = \dfrac{\pi}{4}.1 = \dfrac{\pi}{4}.$

50. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2-1+2-x^2}{4x^2-1}\right)^{\frac{x^3}{1+x}} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2-x^2}{4x^2-1}\right)^{\frac{4x^2-1}{2-x^2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(2-x^2)}{(1+x)(4x^2-1)}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(4-\frac{1}{x^2}\right)}}} = 0.$$

51. (a) এখানে $f(0) = \lim\limits_{x\to 0}f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = 0.$

52. (d) এখানে $k = f(0) = \lim\limits_{x\to 0}f(x) = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}.$

53. (a) এখানে $f(0) = a\lim\limits_{ax\to 0}\dfrac{\log(1+ax)}{ax} + b\lim\limits_{-bx\to 0}\dfrac{\log(1-bx)}{-bx} = a+b.$

54. (c) এখানে $\frac{1}{2} = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\alpha x}{x\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{\alpha x}{2}}{x\sin x} = \frac{\frac{\alpha^2}{2}\left(\lim_{\frac{\alpha x}{2}\to 0} \frac{\sin\frac{\alpha x}{2}}{\frac{\alpha x}{2}}\right)^2}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \alpha = \pm 1.$$

55. (a) $f(x) = |x-a|$ অপেক্ষকটি প্রতিটি বাস্তব x ও a-এর জন্যে সন্তত। আবার সন্তত অপেক্ষকের 'যোগফল'ও সন্তত অপেক্ষক।

সুতরাং $f(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$ অপেক্ষকটি $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত।

56. (d) 54-এর অনুরূপ।

57. (d) এখানে, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{-1-x}-2}{-1-x} = \frac{e^{-1}-2}{-1} = 2 - \frac{1}{e} \neq f(0)$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{0+x}-2}{0+x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(e^x-1)-1}{x}$ – যার (সসীম) অস্তিত্ব নেই।

58. (d) এখানে $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2 2x\right)^{\frac{\tan^2 2x}{2}}$

$$= \left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2 2x\right)^{-\frac{1}{\cos^2 2x}}\right\}^{-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 2x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

59. (a) প্রশ্ন অনুসারে, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\sin 2x}$ $[\frac{0}{0}$ আকার]

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{2\cos 2x} = 0.$$

60. (d) এখানে $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\pi-2x}} = \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)^{-\sec^2 x}\right]^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\frac{\pi}{2}-x}}$

$$= e^{\lim_{\frac{\pi}{2}-x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x} . \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x} = e^{1.0} = e^{\circ} = 1.$$

61. **(a)** প্রদত্ত সীমা $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}.4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} = \dfrac{4}{\sqrt{1+0}+1} = 2.$

62. **(b)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{a^x-1}{(1+bx)^p-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+bx)^p-1}{(bx+1)-1}} \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{\log a}{bp(1)^{p-1}} = \dfrac{\log a}{bp}.$

63. **(d)** নির্ণেয় সীমা $= -\lim\limits_{y\to a} \dfrac{y-a}{ya\sin\frac{2\pi y}{a}}$

$= -\lim\limits_{t\to0} \dfrac{t}{a(a+t)\sin 2\pi\left(\frac{a+t}{a}\right)}$ [$y - a = t$ বসিয়ে পাই $t \to 0$ কারণ $y \to a$]

$= -\lim\limits_{t\to0} \dfrac{t}{a(a+t)\sin\frac{2\pi t}{a}} = -\lim\limits_{t\to0} \dfrac{1}{a(a+t)} . \lim\limits_{t\to0} \left(\dfrac{\frac{2\pi t}{a}}{\sin\frac{2\pi t}{a}}\right) \dfrac{a}{2\pi}$

$= -\dfrac{1}{a^2} . \dfrac{a}{2\pi} = -\dfrac{1}{2a\pi}.$

64. **(a)** যেকোনো $x \in$ D-এর জন্যে (যেখানে $0 \in$ D), $\lim\limits_{h\to0} f(x+h) = \lim\limits_{h\to0} (f(x)+f(h))$

$= f(x) + \lim\limits_{h\to0} f(h) = f(x) + f(0) = f(x+0) = f(x)$. সুতরাং x বিন্দুতে f সন্তত।

65. **(c)** প্রদত্ত সীমা $= \lim\limits_{x\to0} (a-x)^{n-1} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^n - 1}{\frac{a+x}{a-x} - 1} \times 2$

$= a^{n-1}.n.(1)^{n-1}.2 = 2na^{n-1}.$

66. **(c)** এখানে প্রদত্ত সীমা $= \left[\lim\limits_{x\to\infty} \left\{1 + \dfrac{5x+2}{x^2+2x+6}\right\}^{\frac{x^2+2x+6}{5x+2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x(5x+2)}{x^2+2x+6}}$

$= e^{\lim\limits_{\frac{1}{x}\to0} \frac{3\left(5+\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}} = e^{15}.$

67. **(a)** $x = 1$ বিন্দুটি $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ অপেক্ষকের একমাত্র অসন্ততার বিন্দু। যদি $x \neq 1$ হয়, তবে

$u = f(f(x)) = \dfrac{x-1}{x}$ এবং তাই 0 বিন্দুতে u অসন্তত। যদি $x \neq 0$, $x \neq 1$ হয়, তবে $y = f(f(f(x))) = x$, যা সর্বত্র সন্তত। সুতরাং প্রদত্ত অপেক্ষকটি কেবলমাত্র 0 এবং 1 বিন্দুতে অসন্তত।

68. **(a)** এখানে $f(-2) = 3$ এবং $f(2) = 7$ এবং $[-2, 2]$ অন্তরালে $f(x)$ সন্তত $\Rightarrow f(x)$ অপেক্ষকটি 3 এবং 7-এর মধ্যবর্তী সব মান নেয়। যেহেতু $3 < 4\frac{2}{3} < 7$, সুতরাং (a) সত্য।

69. **(b)** প্রদত্ত সীমা $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(x^2+a^2)-(x^4+a^4)}{x\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^4+a^4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a^2\left(x^2-a^2\right)}{x\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^4+a^4}}$

$$= \lim_{\frac{1}{x}\to 0+} \frac{a^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}{x\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{a^4}{x^4}}} = \frac{a^2(1-0)}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{a^2}{2}.$$

70. **(d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x+a}{\sin x}$ সীমাটির অস্তিত্ব আছে; সুতরাং যখন

$x = 0$, $x^2 - 2x + a = 0 \Rightarrow a = 0$.

তাহলে, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x+a}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{\frac{\sin x}{x}} = \dfrac{-2}{1} = -2 = f(0) = b.$

সুতরাং $a = 0$, $b = -2$.

71. **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2(x+1)\cos x} = -\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}\right)^2 . \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(x+1)\cos x} = -1.\ \dfrac{1}{1} = -1.$

72. **(b)** প্রদত্ত সীমা $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{2^x}}{\frac{1}{2^x}}$ $[\frac{1}{2^x} = z$ বসাও; তাহলে $x \to \infty \Rightarrow z \to 0]$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

73. **(a)** এখানে $0 < x < 1 \Rightarrow x^n \to 0$ যেহেতু $n \to \infty$

$$\Rightarrow h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n f(x)+g(x)}{x^n+1} = \frac{0+g(x)}{0+1} = g(x)$$

$\Rightarrow h(x)$ অপেক্ষকটি $(0, 1)$ অন্তরালে সন্তত।

অন্তরকলন

(Differentiation)

ফলাফল/তথ্য সমূহ

i) মনে করা যাক $y = f(x)$ এমন একটি অপেক্ষক যার সংজ্ঞার অঞ্চলে একটি মুক্ত অন্তরাল $I = (a, b)$ অন্তর্ভুক্ত হয়ে আছে। মুক্ত অন্তরাল (a, b)-এর অন্তর্গত একটি বিন্দু $x = c$-তে (অর্থাৎ যেখানে $a < c < b$) অপেক্ষক $y = f(x)$-কে **অন্তরকলনযোগ্য** (বা **অবকলনযোগ্য**) বলা হবে যদি

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\text{-এর অস্তিত্ব থাকে এবং সসীম হয়।}$$

এক্ষেত্রে উপরে উল্লিখিত সীমাটিকে c বিন্দুতে f-এর অন্তরকলজ বলা হয়, যাকে চিহ্নিত করা হয় $f'(c)$, আকারে বা $f'(c) = f'(x)\big|_{x=c}$ আকারে।

ii) একটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) অন্তর্ভুক্ত হয়ে আছে এমন একটি অঞ্চলে সংজ্ঞাত কোনো অপেক্ষক $y = f(x)$-এর ক্ষেত্রে, মুক্ত অন্তরাল (a, b)-এর অন্তর্গত একটি বিন্দু c (অর্থাৎ $a < c < b$)-তে অপেক্ষকটির বামপক্ষের অন্তরকলজ $[f'(c - 0)$ বা $\mathrm{L} f'(c)]$ এবং ডানপক্ষের অন্তরকলজ $[f'(c + 0)$ বা $\mathrm{R}f'(c)]$ বলতে আমরা বুঝব যে,

$$\mathrm{L}f'(c) = f'(c - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

এবং $$\mathrm{R}f'(c) = f'(c + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}.$$

স্পষ্টত, যদি $f'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকে, তবে $f'(c) = \mathrm{L}f'(c) = \mathrm{R}f'(c)$ হবে।

iii) কোনো অপেক্ষক $y = f(x)$-কে

(i) একটি মুক্ত অন্তরাল (a, b) তে অন্তরকলনযোগ্য বা অবকলনযোগ্য বলা যাবে যদি (a, b) অন্তরালের প্রত্যেকটি বিন্দু c (অর্থাৎ $a < c < b$)-এর জন্যে $f'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং তার মান যদি সসীম হয়;

(ii) একটি বন্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে অন্তরকলনযোগ্য বা অবকলনযোগ্য বলা যাবে যদি (a, b) মুক্ত অন্তরালের প্রত্যেকটি বিন্দু c-তে $f'(c)$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং তার মান যদি সসীম হয় এবং তদুপরি যদি $f'(a + 0)$ ও $f'(b - 0)$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং তাদের মান সসীম হয়।